PROF. DR. KONRAD KNOPP

FUNKTIONENTHEORIE

I

GRUNDLAGEN DER ALLGEMEINEN THEORIE DER ANALYTISCHEN FUNKTIONEN

SAMMLUNG GÖSCHEN

BAND 668

SAMMLUNG GÖSCHEN BAND 668

FUNKTIONENTHEORIE

von

PROF. DR. KONRAD KNOPP
ehem. o. Professor der Mathematik an der Universität Tübingen

I

GRUNDLAGEN DER ALLGEMEINEN THEORIE DER ANALYTISCHEN FUNKTIONEN

Zehnte Auflage

Mit 8 Figuren

WALTER DE GRUYTER & CO.
vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung · J. Guttentag,
Verlagsbuchhandlung · Georg Reimer · Karl J. Trübner · Veit & Comp.
BERLIN 1961

Die Gesamtdarstellung umfaßt folgende Bände von Prof. Dr. Konrad Knopp:

Elemente der Funktionentheorie (Bd. 1109)

Funktionentheorie:

I: Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen (Bd. 668)

II: Anwendungen und Weiterführung der allgemeinen Theorie (Bd. 703)

Aufgabensammlung zur Funktionentheorie:

I: Aufgaben zur elementaren Funktionentheorie (Bd. 877)

II: Aufgaben zur höheren Funktionentheorie (Bd. 878)

©

Copyright 1961 by Walter de Gruyter & Co., Berlin W 30, Genthiner Str. 13. Alle Rechte, einschl. der Rechte der Herstellung von Photokopien und Mikrofilmen, von der Verlagshandlung vorbehalten. — Archiv-Nr. 110668.

Satz und Druck: Walter de Gruyter & Co., Berlin W 30.

Printed in Germany

Inhaltsverzeichnis

Erster Abschnitt

Grundlegende Begriffe

1. Kapitel. Zahlen und Punkte

§ 1. Vorkenntnisse 7
§ 2. Zahlenebene und Zahlenkugel 8
§ 3. Punkt- und Zahlenmengen. 11
§ 4. Wege, Gebiete, Kontinuen. 20

2. Kapitel. Funktionen einer komplexen Veränderlichen

§ 5. Begriff der allgemeinsten (eindeutigen) Funktion einer komplexen Veränderlichen 27
§ 6. Stetigkeit und Differenzierbarkeit 29
§ 7. Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen . . . 35

Zweiter Abschnitt

Integralsätze

3. Kapitel. Das Integral einer stetigen Funktion

§ 8. Definition des bestimmten Integrals 39
§ 9. Existenzbeweis für das bestimmte Integral 40
§ 10. Berechnung bestimmter Integrale 44
§ 11. Einfache Integralsätze. 49

4. Kapitel. Der Cauchysche Integralsatz

§ 12. Formulierung des Integralsatzes 51
§ 13. Beweis des Hauptsatzes 53
§ 14. Einfache Folgerungen und Erweiterungen 58

5. Kapitel. Die Cauchyschen Integralformeln

§ 15. Die Hauptformel 64
§ 16. Integralformeln für die Ableitungen 65

Dritter Abschnitt

Reihen und Reihenentwicklungen analytischer Funktionen

6. Kapitel. Reihen mit veränderlichen Gliedern

§ 17. Konvergenzbereich 69
§ 18. Gleichmäßige Konvergenz 73
§ 19. Gleichmäßig konvergente Reihen analytischer Funktionen 75

7. Kapitel. Die Entwicklung analytischer Funktionen in Potenzreihen

§ 20. Entwicklungssatz und Identitätssatz für Potenzreihen . . 80
§ 21. Der Identitätssatz für analytische Funktionen 87

8. Kapitel. Analytische Fortsetzung und vollständige Definition der analytischen Funktion

§ 22. Das Prinzip der analytischen Fortsetzung 93
§ 23. Die elementaren Funktionen 97
§ 24. Fortsetzung durch Potenzreihen und vollständige Definition der analytischen Funktion 99
§ 25. Der Monodromiesatz 107
§ 26. Beispiele mehrdeutiger Funktionen 109

9. Kapitel. Ganze transzendente Funktionen

§ 27. Erklärungen 113
§ 28. Verhalten für große $|z|$ 114

Vierter Abschnitt

Von den singulären Stellen

10. Kapitel. Die Laurentsche Entwicklung

§ 29. Die Entwicklung 118
§ 30. Erläuterungen und Beispiele 120

11. Kapitel. Die verschiedenen Arten singulärer Stellen

§ 31. Wesentlich und außerwesentlich singuläre Stellen oder Pole 123
§ 32. Verhalten analytischer Funktionen im Unendlichen . . 127
§ 33. Der Residuensatz 130
§ 34. Umkehrung analytischer Funktionen 136
§ 35. Die rationalen Funktionen 138

Register 142

Literatur

Die für die Funktionentheorie grundlegenden Arbeiten von Cauchy, Riemann und Weierstraß findet man in deren gesammelten Werken:

Augustin Cauchy, Oeuvres complètes, Paris (Gauthier-Villars) 1882 bis 1921.

Bernhard Riemann, Gesammelte mathematische Werke, 2. Aufl., Leipzig 1892, Nachträge 1902.

Karl Weierstraß, Mathematische Werke, Berlin 1894–1927.

An neueren zusammenfassenden Darstellungen seien genannt:

H. Behnke und F. Sommer, Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen, Berlin und Heidelberg 1955.

L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie,
Bd. I: Elemente der Funktionentheorie, 4. Aufl., Leipzig 1934.
Bd. II: Moderne Funktionentheorie, 2. Aufl., Leipzig 1931.

L. Bieberbach, Einführung in die Funktionentheorie, 2. Auflage, Bielefeld 1952.

H. Burkhardt, Funktionentheoretische Vorlesungen, Bd. I hrsg. von G. Faber, Berlin 1920/21.

C. Carathéodory, Funktionentheorie I, Basel 1950.

G. Doetsch, Funktionentheorie. (Bildet Kap. 15 von E. Pascal, Repertorium der höheren Analysis, 1. Band, 2. Teilband, 2. Aufl., Leipzig 1927.)

É. Goursat, Cours d'analyse mathématique, Bd. II, 7. Aufl., Paris 1949.

J. Hadamard, La série de Taylor et son prolongement analytique (Coll. Scientia) 2. Aufl. hrsg. von S. Mandelbrojt, Paris 1926.

H. Hornich, Lehrbuch der Funktionentheorie, Wien 1950.

C. Jordan, Cours d'analyse, Bd. I, 3. Aufl., Paris 1909.

K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 4. Aufl., Berlin und Heidelberg 1947.

H. v. Mangoldt und K. Knopp, Einführung in die höhere Mathematik, Bd. II, 10. Aufl., Stuttgart 1956; Bd. III, 10. Aufl., Leipzig 1957.

D. Menchoff, Les conditions de monogénéité (Actualités scientifiques et industrielles, No. 329), Paris 1936.

W. F. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. I, 5. Aufl., Leipzig 1928.

É. Picard, Traité d'analyse, Bd. II, 3. Aufl., Paris 1926.

Daneben sei auf die

Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Leipzig 1898ff. hingewiesen, deren Teilbände II, 2 und II, 3 (Leipzig 1901 bis 1927) größtenteils der Funktionentheorie gewidmet sind.

Erster Abschnitt

Grundlegende Begriffe

1. Kapitel. Zahlen und Punkte

§ 1. Vorkenntnisse

Wir setzen voraus, daß der Leser mit der Lehre von den reellen Zahlen und mit den Grundlagen der auf ihr aufgebauten reellen Analysis (Infinitesimalrechnung oder Differential- und Integralrechnung) und mit denen der analytischen Geometrie vertraut ist. In welchem Ausmaße dies für das Verständnis der nachfolgenden Darstellung erforderlich ist, findet der Leser in den ersten Paragraphen der „Elem."[1]) genauer ausgeführt. Wir setzen weiter voraus, daß der Leser auch mit dem übrigen Inhalt der „Elem." im großen und ganzen vertraut ist. Wir nehmen also an, daß er die gewöhnlichen komplexen Zahlen kennt, daß er mit ihnen rechnen kann und daß er weiß, wie die Gesamtheit dieser Zahlen[2]) den Punkten oder Vektoren einer Ebene oder den (vom „Nordpol" verschiedenen) Punkten einer Kugel umkehrbar eindeutig zugeordnet werden kann und wie dadurch jede rechnerische Betrachtung geometrisch veranschaulicht und jede geometrische Betrachtung rechnerisch verfolgt werden kann (Elem., I. Abschn.). Wir nehmen ebenso an, daß er die unendlichen Zahlenfolgen und damit die unendlichen Reihen mit komplexen Gliedern und den Begriff der Funktion eines komplexen Argumentes schon in der Hauptsache kennt und mit der Anwendung des Grenzbegriffes bei beiden, also auch mit

[1]) Durch „Elem." verweisen wir auf unser Bändchen „Elemente der Funktionentheorie", Sammlung Göschen Nr. 1109, 5. Aufl., Berlin 1959.

[2]) Wenn im folgenden von „Zahlen" gesprochen wird, so sind darunter immer die (gewöhnlichen) komplexen Zahlen zu verstehen, es sei denn, daß das Gegenteil ausdrücklich gesagt wird.

dem Begriff der Stetigkeit und Differenzierbarkeit der genannten Funktionen vertraut ist (Elem., III. u. IV. Abschn.), und endlich, daß er das Wichtigste über die sogenannten elementaren Funktionen weiß (Elem., II. u. V. Abschn.).

Um den Leser aber instand zu setzen, selbst zu beurteilen, inwieweit diese Voraussetzungen bei ihm erfüllt sind, und um zugleich einen festen Boden für die nachfolgende Grundlegung der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen zu gewinnen, sollen in diesem und dem nachfolgenden Kapitel die für die jetzigen Zwecke wichtigsten Dinge aus den „Elem." kurz zusammengefaßt und in einigem ergänzt werden.

§ 2. Zahlenebene und Zahlenkugel

Die komplexen Zahlen lassen sich umkehrbar eindeutig den Punkten einer durch ein rechtwinkliges Achsenkreuz orientierten Ebene zuordnen, die man dann kurz als „die (Gaußsche oder komplexe) Zahlenebene" oder noch kürzer als „die z-Ebene" bezeichnet: Jeder komplexen Zahl $z = x + iy$ ordnet man denjenigen Punkt zu, dessen Abszisse gleich dem reellen Teil $x = \Re(z)$ und dessen Ordinate gleich dem imaginären Teil $y = \Im(z) = \Re(-iz)$ ist[1]). Infolge dieser Festsetzung entspricht jeder komplexen Zahl z genau ein Punkt der z-Ebene und umgekehrt jedem Punkt dieser Ebene genau eine komplexe Zahl. Die Ausdrücke „Punkt" und „Zahl" können daher ohne Furcht vor Mißverständnissen als vollkommen gleichbedeutend gebraucht werden. Wir werden also im folgenden z. B. von „dem Punkt $i\sqrt{3}$" oder von „dem

[1]) Kleine lateinische oder griechische (gelegentlich auch deutsche) Buchstaben können im folgenden immer komplexe Zahlen bedeuten, wenn das Gegenteil aus dem Zusammenhang nicht eindeutig hervorgeht. Doch werden x, y und später öfter u, v und ξ, η gern für den reellen bzw. imaginären Teil, also für reelle Zahlen, vorbehalten. — Zuweilen wird auch iy (nicht y allein) als der imaginäre Teil von z bezeichnet. Verwechslungen sind stets durch den Zusammenhang ausgeschlossen.

Abstand zweier Zahlen" oder „dem Dreieck mit den Ecken z_1, z_2, z_3" usw. sprechen dürfen.

Sind r und φ die Polarkoordinaten des Punktes z, so heißt r der (absolute) Betrag und φ der Arcus von z, in Zeichen: $|z| = r$, $\arc z = \varphi$.

Aus dieser Äquivalenz von Punkt und Zahl ergeben sich folgende einfache Tatsachen, deren besondere Hervorhebung noch nützlich ist:

a) Der Abstand eines Punktes z vom Nullpunkt ist $= |z|$; der Abstand zweier Punkte z_1 und z_2 voneinander ist $= |z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$. Die Zahl $z_2 - z_1$ wird durch den Vektor veranschaulicht, der von dem Punkte z_1 zum Punkte z_2 führt. Es ist stets

$$|z_1 \pm z_2| \leqq |z_1| + |z_2| \text{ und } |z_1 \pm z_2| \geqq ||z_1| - |z_2||.$$

b) Durch $|z| = 1$ ist die Kreislinie mit dem Radius 1 um den Punkt 0, die Peripherie des sog. **Einheitskreises**, charakterisiert, d. h. alle Zahlen z, für die $|z| = 1$ ist, sind Punkte dieser Peripherie und umgekehrt.

c) Durch $|z - z_0| < r$ ist ebenso die Fläche des Kreises mit dem Radius r um z_0 ausschließlich seiner Peripherie (seines Randes) charakterisiert[1]).

d) Durch $|z + 4i| \leqq 3$ ebenso die Fläche des Kreises mit dem Radius 3 um $-4i$, einschließlich seines Randes.

e) Durch $|z - z_1| > R$ ebenso der Teil der z-Ebene, der außerhalb des Kreises mit dem Radius R um z_1 liegt.

f) Durch $\Re(z) > 0$ ebenso die „rechte" Halbebene, d. h. der Teil der z-Ebene, der bei der üblichen Orientierung des Achsenkreuzes rechts von der Achse des Imaginären liegt, ausschließlich dieses ihres Randes. Durch $\Im(z) \geqq 0$ ebenso die „obere" Halbebene einschließlich ihres Randes.

[1]) Nur wenn die Unterscheidung von Kreislinie und Kreisfläche sich von selbst versteht oder unwesentlich ist, bezeichnet man beide als Kreis.

g) Durch $0 < r < |z - z_0| < R$ ebenso das Innere des Kreisringes, der zwischen den Kreislinien mit r und R um z_0 liegt, ausschließlich der beiden Ränder.

h) Durch $\zeta + z'$ ist bei festem ζ und willkürlichem, nur der Beschränkung $|z'| < \varepsilon$ unterworfenem z', wie unter c), eine Kreisfläche um ζ mit ε (ohne ihren Rand) oder, wie man kurz sagt, „eine (kreisförmige) Umgebung", genauer „eine ε-Umgebung", des Punktes ζ charakterisiert; denn setzt man $\zeta + z' = z$, so soll eben

$$|z'| = |z - \zeta| < \varepsilon$$

sein.

Die komplexe Zahlenebene wird durch einen uneigentlichen Punkt, den Punkt $z = \infty$, ergänzt[1]) (s. Elem., § 14, 15 u. 17). Das Äußere eines Kreises (vgl. e)) spricht man darum auch als „eine Umgebung des Punktes ∞" an. Ein Buchstabe soll aber vorläufig niemals den Punkt ∞ bedeuten dürfen, wenn das Gegenteil nicht ausdrücklich gesagt ist.

Durch die sog. „stereographische Abbildung" (s. Elem., 3. Kap.) werden die Punkte der komplexen Ebene wiederum umkehrbar eindeutig auf die Punkte einer Kugel der (Riemannschen oder komplexen) Zahlenkugel, kurz der z-Kugel, abgebildet. Die übliche Vorstellung ist dabei die, daß eine Kugel vom Durchmesser 1 so auf die z-Ebene gelegt wird, daß der Berührungspunkt im Nullpunkt liegt (Südpol). Durch die vom Nordpol ausgehenden Strahlen wird dann jedem Punkt der z-Ebene umkehrbar eindeutig ein Punkt der Kugel zugeordnet, den man wieder kurz den Punkt z derselben nennt. Der Nordpol der Kugel ist dann der (hier ganz reale) Vertreter „des Punktes ∞" der z-Ebene. Man sagt: Die

[1]) Man beachte den Unterschied einmal gegen die Menge der reellen Zahlen (Zahlengerade), bei der man zwei uneigentliche Werte, nämlich $+\infty$ und $-\infty$, einzuführen Veranlassung hat, und andererseits gegen „die projektive Ebene", bei der man unendlich viele uneigentlichen Punkte einführt, die zusammen die uneigentliche Gerade der Ebene bilden. Die komplexe Zahlenebene ist von der projektiven Ebene strukturell (topologisch) wesentlich verschieden.

durch den Punkt ∞ ergänzte komplexe Zahlenebene hat dieselben Zusammenhangsverhältnisse (dieselbe topologische Struktur) wie die volle Kugelfläche.

Dem Einheitskreis der Ebene entspricht der Äquator der Kugel, der unteren (oberen) Halbebene die vordere (hintere) Halbkugel, den Halbstrahlen aus 0 die Halbmeridiane, den Kreisen um 0 die Breitenkreise, einer Spiegelung am Einheitskreise entspricht eine (gewöhnliche) Spiegelung an der Äquatorebene, dem Inneren (Äußeren) des Einheitskreises die südliche (nördliche) Halbkugel, einer Umgebung des Punktes ∞ eine Kugelkappe um den Nordpol usw.

Aufgaben. 1. Welche Linienzüge der Ebene werden durch die Beziehungen

$$\alpha)\ \left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 1, \quad \beta)\ \left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 2, \quad \gamma)\ \left|\frac{z}{z+1}\right| = \alpha\ (>0),$$

$$\delta)\ \Re(z^2) = 4, \quad \varepsilon)\ \Im(z^2) = 4, \quad \zeta)\ |z^2-1| = \alpha\ (>0)$$

charakterisiert? Welche Flächenstücke werden durch dieselben Beziehungen charakterisiert, wenn in ihnen das Gleichheitszeichen durch $<$, $>$, $\leqq$ oder $\geqq$ ersetzt wird?

2. Welche gegenseitige Lage haben in der Ebene oder auf der Kugel die Punkte

a) z und $-z$; b) z und $\bar{z}$[1]); c) z und $-\bar{z}$;

d) z und $\frac{1}{z}$; e) z und $\frac{1}{\bar{z}}$; f) z und $-\frac{1}{\bar{z}}$?

§ 3. Punkt- und Zahlenmengen

Sondert man aus der Gesamtheit aller (komplexen) Zahlen nach einem bestimmten Gesichtspunkt endlich oder unendlich viele heraus, so bilden diese eine Zahlenmenge, die entsprechenden Punkte eine Punktmenge. Auch die Ausdrücke „Punktmenge" und „Zahlenmenge" werden als völlig gleichbedeutend angesehen. Eine solche Menge $\mathfrak{M}$ sieht man als gegeben oder definiert an, wenn ihre Erklärung (der aussondernde Gesichtspunkt) so gefaßt ist, daß für jede Zahl nur

[1]) Durch $\bar{z}$ wird die zu z konjugierte komplexe Zahl bezeichnet (s. Elem., § 5).

genau eine der beiden Möglichkeiten besteht, daß sie zur Menge oder nicht zur Menge gehört. Da die sie veranschaulichende Punktmenge $\mathfrak{M}$ in der komplexen Zahlenebene gelegen ist, so spricht man auch von „ebenen Mengen". Die Zahlen (Punkte) der Menge werden ihre Elemente genannt.

Liegen alle Punkte einer solchen Menge auf einer und derselben Geraden, so nennt man sie auch eine lineare Menge. Ist die Gerade insbesondere die reelle Achse, so haben wir die reellen Mengen vor uns. Wir setzen voraus, daß der Leser mit diesen wie auch mit den ebenen Punktmengen im allgemeinen bekannt ist (Elem., III. Abschn., 6. Kap.). Auch die Lehre von den Zahlenfolgen und den unendlichen Reihen, insbesondere von den Potenzreihen, muß der Leser in den Hauptzügen kennen (Elem., III. Abschn., 7. u. 8. Kap.). In den genannten Kapiteln der Elemente finden sich auch viele Beispiele zu den hier besprochenen Dingen. Jede geometrische Figur liefert eine Punktmenge, jede Punktmenge kann als geometrische Figur angesehen werden.

Bei den reellen Mengen war besonders der Begriff der unteren bzw. oberen Grenze wichtig und der Satz, daß jede reelle, nicht leere Menge eine eindeutig bestimmte untere und ebenso eine eindeutig bestimmte obere Grenze besitzt. In dieser Allgemeinheit gilt der Satz allerdings nur, wenn man auch die Zeichen $-\infty$ und $+\infty$ als untere bzw. obere Grenze zuläßt. Andernfalls gilt er nur, wenn die Menge „nach links" bzw. „nach rechts beschränkt" ist. Ebenso wichtig war der Begriff des unteren bzw. oberen Limes ($\underline{\lim}$, $\overline{\lim}$, kleinster bzw. größter Häufungspunkt) einer (unendlichen) Menge und der Satz, daß auch diese Werte durch die Menge eindeutig bestimmt sind. Auf weitere Einzelheiten soll indessen bei den reellen Mengen nicht wieder eingegangen werden.

Bei den ebenen Punktmengen, die uns jetzt vor allem angehen, unterscheidet man ebenfalls zwischen beschränkten und

nicht beschränkten Mengen: Eine Menge $\mathfrak{M}$ heißt beschränkt, wenn alle ihre Punkte in eine Figur von endlichen Ausmaßen (z. B. in einen Kreis) eingeschlossen werden können, schärfer: wenn es eine positive Zahl K gibt, so daß für alle Punkte z der Menge

$$|z| \leqq K$$

ist. Liegen aber außerhalb jedes noch so großen Kreises um 0 noch Punkte von $\mathfrak{M}$, so heißt $\mathfrak{M}$ unbeschränkt oder nicht-beschränkt.

Ein Punkt ζ der Ebene heißt Häufungspunkt einer Menge $\mathfrak{M}$, wenn in jeder Umgebung von ζ (s. § 2, h) immer noch unendlich viele Punkte z der Menge liegen, wenn es also bei (beliebig klein) gegebenem $\varepsilon > 0$ immer noch unendlich viele z der Menge gibt, für die

$$|z - \zeta| < \varepsilon$$

ist. Beispiele sind in Elem., III. Abschn., 6. Kap. zahlreich vorgekommen. Über solche Häufungspunkte gilt der grundlegende **Bolzano-Weierstraßsche Satz** (Elem., § 25):

Satz 1. *Jede beschränkte unendliche (d. h. aus unendlich vielen Punkten bestehende) Punktmenge besitzt mindestens einen Häufungspunkt.*

Ist die Menge nicht-beschränkt, so bedeutet dies, auf der Kugel gedeutet, daß in jeder (noch so kleinen) Umgebung des Nordpols unendlich viele Punkte der Menge liegen. Es ist daher sinngemäß, in diesem Falle den Punkt ∞ als Häufungspunkt der Menge anzusprechen. Mit dieser Ausdrucksweise gilt dann der Bolzano-Weierstraßsche Satz für jede unendliche Punktmenge.

Wir erinnern weiter noch einmal an einige einfache Begriffe, deren Einführung die Verständigung erleichtert:

1. Ist $\mathfrak{M}$ eine beliebige Punktmenge, so bildet die Gesamtheit der nicht zu $\mathfrak{M}$ gehörigen Punkte die Komplementärmenge zu $\mathfrak{M}$. Gehören alle Punkte von $\mathfrak{M}$ zu einer andern Menge $\mathfrak{N}$, so heißt $\mathfrak{M}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{N}$.

2. Ist der aussondernde Gesichtspunkt, durch den eine Menge definiert werden soll, so beschaffen, daß es keinen Punkt der betreffenden Art gibt, so sagt man, die Menge jener Punkte sei „leer". Für leere Mengen werden einige der besprochenen Begriffe und Aussagen bedeutungslos.

3. Ein zu einer Menge $\mathfrak{M}$ gehöriger Punkt z_1 heißt ein „isolierter Punkt" derselben, wenn sich eine Umgebung von z_1 angeben läßt, die keinen weiteren Punkt der Menge enthält.

4. Ein zu einer Menge $\mathfrak{M}$ gehöriger Punkt z_1 heißt ein „innerer Punkt" der Menge, wenn eine Umgebung von z_1 ganz zu $\mathfrak{M}$ gehört.

5. Ein Punkt ζ der Ebene heißt ein „äußerer Punkt" in bezug auf eine Menge $\mathfrak{M}$, wenn er selbst und eine Umgebung von ihm nicht zu $\mathfrak{M}$ gehört.

6. Ein Punkt ζ der Ebene heißt ein „Randpunkt" einer Menge $\mathfrak{M}$, wenn in jeder Umgebung von ζ mindestens ein Punkt liegt, der zu $\mathfrak{M}$ gehört, und auch mindestens einer, der nicht zu $\mathfrak{M}$ gehört. ζ selbst kann zur Menge gehören oder auch nicht. Ein isolierter Punkt einer Menge $\mathfrak{M}$ oder ihrer Komplementärmenge ist hiernach stets ein Randpunkt von $\mathfrak{M}$, ein innerer Punkt niemals.

7. Eine Menge heißt „abgeschlossen", wenn alle ihre Häufungspunkte zu ihr gehören. Vom Punkt ∞ wird hierbei im allgemeinen abgesehen. Man sagt dann genauer „in der Ebene abgeschlossen"; andernfalls „auf der Kugel abgeschlossen". Eine beschränkte und abgeschlossene Menge wird als kompakt bezeichnet.

8. Eine Menge heißt „offen", wenn jeder ihrer Punkte ein innerer Punkt der Menge ist. In Erweiterung von § 2, h) wird jede offene Menge, die den Punkt ζ enthält, eine Umgebung von ζ genannt.

9. Kann man eine Menge $\mathfrak{M}$ so in zwei zueinander fremde (nicht leere) Teilmengen zerlegen, daß auch keine von ihnen

einen Häufungspunkt der andern enthält, so sagt man, daß $\mathfrak{M}$ nicht zusammenhängt. Ist eine solche Zerlegung nicht möglich, so heißt $\mathfrak{M}$ zusammenhängend. Eine abgeschlossene Menge ist genau dann zusammenhängend, wenn sie nicht in zwei abgeschlossene, zueinander fremde, nicht leere Teilmengen zerlegt werden kann. Eine offene Menge ist genau dann zusammenhängend, wenn man je zwei ihrer Punkte durch einen Polygonzug oder eine stetige Kurve (s. § 4) verbinden kann, die ganz in der Menge verläuft.

10. Als „Durchmesser" einer (nicht leeren) Menge bezeichnet man die obere Grenze der Abstände je zweier ihrer Punkte. Ist die Menge kompakt, so gibt es in ihr zwei Punkte z_1, z_2, so daß der Durchmesser der Menge $= |z_2 - z_1|$ ist; kurz: der Durchmesser wird „angenommen".

11. Als „Abstand" eines Punktes ζ von einer (nicht leeren) Menge $\mathfrak{M}$ bezeichnet man die untere Grenze der Abstände des Punktes ζ von den Punkten der Menge. Ist $\mathfrak{M}$ abgeschlossen, so gibt es in $\mathfrak{M}$ einen Punkt z_0, so daß der Abstand des Punktes ζ von $\mathfrak{M}$ gleich dem Abstand $|z_0 - \zeta|$ ist; der Abstand wird angenommen.

12. Als „Abstand" zweier (nicht leerer) Mengen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ bezeichnet man die untere Grenze der Abstände $|z_1 - z_2|$ eines Punktes z_1 aus $\mathfrak{M}_1$ von einem Punkte z_2 aus $\mathfrak{M}_2$. Sind die Mengen abgeschlossen und ist wenigstens eine von ihnen beschränkt, so wird auch hier der Abstand angenommen.

13. Unter dem „Durchschnitt" zweier Mengen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$, in Zeichen: $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2$, versteht man die Menge aller derjenigen Punkte, die sowohl zu $\mathfrak{M}_1$ als zu $\mathfrak{M}_2$ gehören. Ein solcher Durchschnitt kann leer (s. 2.) sein. Dann werden $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ als „fremde" Mengen bezeichnet. Eine entsprechende Erklärung gilt für mehrere oder für unendlich viele Mengen.

14. Als „Vereinigungsmenge" zweier Mengen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$, in Zeichen: $\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$, bezeichnet man die Menge aller derjenigen Punkte. die entweder zu $\mathfrak{M}_1$ oder zu $\mathfrak{M}_2$ gehören, und

eine entsprechende Erklärung gilt auch hier für mehrere oder für unendlich viele Mengen.

Das Prinzip der Intervallschachtelung (s. Elem., § 27) gestattet nun eine weitgehende Verallgemeinerung und führt zu dem sog. **Einschachtelungssatz:**

Satz 2. *Bilden* $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_n, \ldots$ *eine Folge ganz beliebiger (nicht leerer) abgeschlossener Punktmengen, deren jede eine Teilmenge der vorangehenden ist, und nehmen die Durchmesser derselben mit wachsendem* n *zu* 0 *ab, so gibt es stets einen und nur einen Punkt* ζ*, der allen* $\mathfrak{M}_n$ *angehört.*

Beweis. Zunächst ist klar, daß nicht zwei verschiedene Punkte ζ' und ζ'' allen $\mathfrak{M}_n$ angehören können, da sonst entgegen der Annahme die Durchmesser aller Mengen mindestens gleich der festen positiven Zahl $|\zeta'' - \zeta'|$ sein müßten. Weiter ist klar, daß fast alle[1]) Mengen $\mathfrak{M}_n$ beschränkt sind; denn fast alle Mengen müssen einen endlichen Durchmesser haben, und eine Menge mit endlichem Durchmesser ist gewiß beschränkt. Wählt man nun aus jeder Menge einen Punkt, etwa z_n aus $\mathfrak{M}_n$, so ist die Menge dieser z_n beschränkt und hat also einen im Endlichen gelegenen Häufungspunkt ζ. Dieser gehört allen $\mathfrak{M}_n$ an; denn ist p eine beliebige natürliche Zahl, so hat die ganz zu $\mathfrak{M}_p$ gehörige Folge $z_p, z_{p+1}, \ldots$ ebenfalls den Häufungspunkt ζ. Da aber $\mathfrak{M}_p$ abgeschlossen ist, so gehört ζ auch zu $\mathfrak{M}_p$, d. h. zu jeder der Mengen.

Etwas tiefer gelegen und in der Folge von großer Bedeutung ist ein Satz, dem folgender Sachverhalt zugrunde liegt: Es ist eine kompakte Menge $\mathfrak{M}$ gegeben und jeder Punkt z derselben wird von einem Kreise $\mathfrak{K}_z$ „überdeckt", d. h. er ist in dessen Inneren gelegen. Es existiert also eine gewisse (im allgemeinen wieder unendliche) Menge von Kreisen $\mathfrak{K}_z$ derart, daß jeder Punkt aus $\mathfrak{M}$ von mindestens einem dieser Kreise überdeckt wird (ein und derselbe Kreis

[1]) D. h. alle bis auf endlich viele (s. Elem., § 26).

darf aber mehrere Punkte überdecken). In solchem Falle behauptet nun der **Heine-Borelsche Satz:**

Satz 3. *Wird jeder Punkt z einer kompakten Menge $\mathfrak{M}$ von mindestens einem der Kreise $\mathfrak{K}_z$ überdeckt, so sind schon endlich viele von diesen Kreisen ausreichend, um die Menge zu überdecken.*

Beweis. Wir beweisen den Satz indirekt, indem wir zeigen, daß die Annahme, es seien zur Überdeckung von $\mathfrak{M}$ unendlich viele der Kreise notwendig, mit der Voraussetzung der Abgeschlossenheit in Widerspruch steht. Dazu schließen wir die Menge $\mathfrak{M}$ zunächst in ein Quadrat $\mathfrak{Q}_1$ ein und teilen das Quadrat in 4 kongruente Teilquadrate. Die in jedem der 4 Teile (die wir uns durch Hinzunehme ihrer Seiten abgeschlossen denken) gelegenen Punkte von $\mathfrak{M}$ bilden wieder je eine kompakte Menge. Wären nun zur Überdeckung der ganzen Menge unendlich viele der Kreise nötig, so wäre dies auch bei mindestens einer dieser 4 Teilmengen der Fall. Wir nennen das erste der 4 Quadrate[1]), für das dies der Fall wäre, $\mathfrak{Q}_2$. Von diesem gelangen wir ebenso zu einem Quadrat $\mathfrak{Q}_3$ und so zu einer Folge ineinander geschachtelter Quadrate $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots, \mathfrak{Q}_n, \ldots$, deren Durchmesser zu 0 abnehmen und deren jedes eine Teilmenge von $\mathfrak{M}$ enthielte, für deren Überdeckung unendlich viele der Kreise $\mathfrak{K}_z$ nötig wären.

Das kann aber nicht der Fall sein, wenn $\mathfrak{M}$ abgeschlossen ist. Denn ist ζ der Punkt, auf den diese Quadratschachtelung zusammenschrumpft, so ist ζ Häufungspunkt von $\mathfrak{M}$ und gehört somit selbst zu $\mathfrak{M}$. Daher wird ζ von einem der in Rede stehenden Kreise, etwa von $\mathfrak{K}_\zeta$, überdeckt. Wählt man dann p so groß, daß die Diagonale von $\mathfrak{Q}_p$ kleiner ist als der Abstand des Punktes ζ vom Rande des Kreises $\mathfrak{K}_\zeta$, so werden alle in $\mathfrak{Q}_p$ gelegenen Punkte aus $\mathfrak{M}$ schon von diesem einen Kreise $\mathfrak{K}_\zeta$

[1]) Wir denken uns die Seiten aller Quadrate parallel zu den Achsen und numerieren die Teilquadrate in der bei den Quadranten der Ebene üblichen Reihenfolge.

überdeckt, während für diese Punkte doch unendlich viele Kreise nötig sein sollten. Dies ist also nicht der Fall, der Satz muß vielmehr richtig sein.

Ist eine Menge so beschaffen, daß man die zu ihr gehörigen Zahlen (Punkte) numerieren, d. h. derart der Reihe nach als 1-te, 2-te, ..., n-te, ... oder als $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ bezeichnen kann, daß hierdurch jedes Element eine bestimmte Nummer erhält, so heißt die Menge „abzählbar". Ist dies nicht möglich, so heißt sie „nicht abzählbar". (Vgl. Elem., 7. Kap., wo auch Beispiele vorkommen.) Hat man eine Abzählung durchgeführt, so sagt man auch, man habe die Menge zu einer Punkt- bzw. Zahlenfolge geordnet.

Bei einer Punkt- bzw. Zahlenfolge läßt man aber im allgemeinen zu, daß dieselbe Zahl mehrfach, sogar unendlich oft, auftritt. Man definiert also ganz allgemein: Ist jeder natürlichen Zahl $1, 2, \ldots, n, \ldots$ in ganz beliebiger Weise je eine bestimmte (komplexe) Zahl $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ zugeordnet, so sagt man, daß diese Zahlen in der angegebenen Anordnung eine Zahlenfolge, die ihr entsprechenden Punkte eine Punktfolge bilden. Man bezeichnet sie kurz mit (z_n) und nennt die einzelnen Zahlen z_n ihre „Glieder". Es handelt sich hier also einfach um abzählbare und in bestimmter Weise abgezählte (durchnumerierte) Mengen — jedoch unter der besonderen Vereinbarung, daß Glieder mit verschiedener Nummer nicht notwendig verschieden zu sein brauchen. Ein und derselbe Punkt ist dann also mehrfach oder gar unendlich oft als Punkt der Folge zu betrachten; „er zählt mehrfach bzw. unendlich oft". Von dieser in ihrer Wirkung leicht zu überschauenden Festsetzung abgesehen gelten daher für Zahlen- und Punktfolgen die für beliebige Zahlen- und Punktmengen durchgeführten Betrachtungen. Insbesondere gelten die Sätze 1, 2 und 3 dieses Paragraphen, — man hat nur zu berücksichtigen, daß auf Grund der eben getroffenen Vereinbarungen ein Punkt ζ, der unendlich oft in einer Punktfolge

auftritt, auch ein Häufungspunkt derselben ist. ζ heißt also genau dann ein Häufungspunkt der Folge (z_n), wenn bei (beliebig klein) gegebenem ε unendlich viele z_n in der ε-Umgebung von ζ liegen, wenn für unendlich viele n also

$$|z_n - \zeta| < \varepsilon$$

ist. — Von besonderem Interesse ist der Fall, daß ζ der einzige Häufungspunkt einer beschränkten Folge (z_n) ist. Dann gilt die letzte Beziehung für alle hinreichend großen n, also für fast alle n (oder alle n „von einer Stelle ab", etwa für alle $n > n_0 = n_0(\varepsilon)$), man nennt ζ den „Limes" der Folge, schreibt

$$z_n \to \zeta \text{ für } n \to \infty \quad \text{oder} \quad \lim_{n\to\infty} z_n = \zeta$$

und sagt, die Zahlenfolge $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ konvergiere gegen den Grenzwert ζ.

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für das Eintreten dieses Falles liefert das **Allgemeine Cauchysche Konvergenzprinzip** (s. Elem., § 26):

Satz 4. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Folge $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ einen Limes hat, ist diese: Jedem beliebig gegebenen $\varepsilon > 0$ läßt sich eine Zahl $n_0 = n_0(\varepsilon)$ so zuordnen, daß für alle $n > n_0(\varepsilon)$ und alle $p > 0$*

$$|z_{n+p} - z_n| < \varepsilon$$

ist[1]).

Wird eine Zahlenfolge (z_n) mittelbar dadurch gegeben, daß mit Hilfe einer unmittelbar gegebenen Zahlenfolge (a_n) die Summen

$$z_1 = a_1,\ z_2 = a_1 + a_2,\ z_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots,$$
$$z_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n), \ldots$$

[1]) Gilt für eine Menge (man sagt auch: Raum) von Dingen — hier also für die Gesamtheit der komplexen Zahlen z — ein Satz der obigen Form, so nennt man den Raum dieser Dinge vollständig. Das Cauchysche Konvergenzprinzip ist also der Ausdruck für die Vollständigkeit des Raumes der komplexen Zahlen.

oder die Produkte

$$z_1 = a_1,\ z_2 = a_1 \cdot a_2,\ z_3 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3, \ldots,$$
$$z_n = (a_1 \cdot a_2 \cdots a_n), \ldots$$

gebildet werden, so bezeichnet man solche Zahlenfolgen auch kurz mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{bzw.} \quad \prod_{n=1}^{\infty} a_n$$

und spricht von einer „unendlichen Reihe" mit den Gliedern a_n bzw. von einem „unendlichen Produkt" mit den Faktoren a_n. Die z_n heißen deren „Teilsummen" bzw. „Teilprodukte". Mit dem Gebrauch der unendlichen Reihen muß der Leser vertraut sein (s. Elem., 7. u. 8. Kap.).

Aufgaben. 1. Ist die durch die Beziehung

$$|z| + \Re(z) \leqq 1$$

definierte Menge beschränkt? Welchen Teil der Ebene erfüllen die Punkte dieser Menge?

2. Man beweise, daß jede nur aus isolierten Punkten bestehende Menge abzählbar ist.

3. Man beweise die unter 10, 11 und 12 gemachten Aussagen, daß die dortigen Werte „angenommen" werden.

4. Man zeige: Jeder nicht zu einer Menge $\mathfrak{M}$ gehörige Häufungspunkt von $\mathfrak{M}$ ist ein Randpunkt derselben, und jeder nicht zu $\mathfrak{M}$ gehörige Randpunkt ist ein Häufungspunkt von $\mathfrak{M}$.

5. Man zeige: Die Gesamtheit der Randpunkte einer Menge bildet selbst eine abgeschlossene Menge.

§ 4. Wege, Gebiete, Kontinuen

Wie unter den reellen Punktmengen die offenen und abgeschlossenen Intervalle besonders wichtig waren, sind es in der Ebene die Wege, Gebiete und Kontinuen, die wir nun genau definieren wollen.

1. Sind $x(t)$ und $y(t)$ im Intervall $\alpha \leqq t \leqq \beta$ stetige (reelle) Funktionen von t, so ist

$$x = x(t), \quad y = y(t) \tag{1}$$

die Parameterdarstellung einer stetigen Kurve[1]). Setzt man $x + iy = z$, also $x(t) + iy(t) = z(t)$, so kann die Darstellung kürzer

$$z = z(t), \quad \alpha \leqq t \leqq \beta \tag{2}$$

geschrieben werden.

Eine stetige Kurve ist durch diese ihre Darstellung von selbst orientiert: Von den zu zwei Parameterwerten $t_1 < t_2$ gehörigen Punkten $z(t_1)$ und $z(t_2)$ soll der erste als der „früher durchlaufene" gelten, — auch wenn $z(t_2) = z(t_1)$, der zugehörige Punkt also ein Doppel- oder mehrfacher Punkt sein sollte. Die Punkte $z(t)$ mit $t_1 < t < t_2$ gelten in jedem Falle als „zwischen" $z(t_1)$ und $z(t_2)$ gelegen. $z(\alpha) = a$ ist der Anfangs-, $z(\beta) = b$ der Endpunkt der Kurve. Ist für $t_1 \neq t_2$ stets $z(t_1) \neq z(t_2)$, so spricht man von einer einfachen stetigen Kurve[2]).

Eine beliebige stetige Kurve braucht keine angebbare Länge zu besitzen. Kommt ihr aber eine bestimmte Länge zu, so soll sie streckbar (rektifizierbar) heißen. Wir nennen sie dann kürzer einen **Weg.**

Auf eine genauere Untersuchung des Begriffes der Rektifizierbarkeit soll hier nicht eingegangen werden; doch sei kurz an seine Definition erinnert: Teilt man das Parameterintervall $\langle \alpha, \beta \rangle$ irgendwie in n Teile, die durch $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = \beta$ bestimmt seien, markiert man auf der Kurve die Punkte $z(t_\nu)$, $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, n)$ und verbindet sie der Reihe nach durch Strecken, so entsteht ein der Kurve „einbeschriebener Streckenzug", dem natürlich eine bestimmte Länge zukommt. Ist nun die Menge der Längen aller solcher einbeschriebenen Strecken-

[1]) Statt Kurve sagen wir im folgenden auch oft Kurvenstück. Entsprechend weiter unten Wegstück statt Weg.

[2]) Auch von einer stetigen und doppelpunktfreien oder Jordanschen Kurve.

züge beschränkt, so heißt die vorgelegte Kurve streckbar, und die obere Grenze der genannten Menge wird als ihre Länge bezeichnet. Eine durch die Parameterdarstellung (1) gegebene stetige Kurve ist dann und nur dann streckbar, wenn die beiden Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ von beschränkter Schwankung sind. Es ist dies insbesondere immer dann der Fall, wenn $x(t)$ und $y(t)$ stückweise stetig differenzierbar sind, d. h. wenn $\langle \alpha, \beta \rangle$ so in endlich viele Teile geteilt werden kann, daß in jedem Teil die genannten Funktionen stetige Ableitungen besitzen, an seinen Endpunkten wenigstens nach innen. — Die Länge einer so aus mehreren Teilen zusammengesetzten Kurve ist gleich der Summe der Längen der einzelnen Teile, und das entsprechende gilt, wenn man einen Weg durch Teilpunkte in mehrere Teile zerlegt.

Die Gesamtheit der Punkte eines Weges bildet wegen der Stetigkeit von $x(t)$ und $y(t)$ eine abgeschlossene Punktmenge. (Beweis?)

Läßt man bei einem Wege Anfangs- und Endpunkt zusammenfallen, so spricht man von einem **geschlossenen Wege.** Er ist nach wie vor in dem Sinne orientiert, daß $z(t)$ den ganzen geschlossenen Weg genau einmal in bestimmtem Sinne durchläuft, wenn t sein Intervall durchläuft. Entsprechen hierbei wieder zwei verschiedenen Werten von t — außer dem Anfangs- und Endwert — stets verschiedene Punkte z, so heißt er einfach oder doppelpunktfrei.

Über doppelpunktfreie geschlossene Wege und allgemeiner über geschlossene Jordansche Kurven gilt der sog.

Jordansche Kurvensatz. *Eine geschlossene Jordansche Kurve zerlegt die Ebene in genau zwei getrennte Gebiete (s. u.), ein innerhalb und ein außerhalb der Kurve gelegenes.*

Der Beweis dieses wichtigen Satzes ist für elementare Kurven (Kreis, Dreieck, Rechteck, ...) sehr einfach, für beliebige geschlossene Jordansche Kurven (auch schon für

Polygone) aber trotz seiner anschaulichen Evidenz schwierig, so daß hier nicht auf ihn eingegangen werden kann.

Ist die Orientierung eines geschlossenen Weges so, daß das Innere zur Linken gelegen ist, so nennen wir sie positiv[1]), andernfalls negativ. Wenn nichts anderes gesagt ist, denken wir uns geschlossene Wege positiv orientiert.

Jede (orientierte) Strecke ist natürlich ein Weg. Hängt man endlich viele Strecken aneinander, so nennt man den entstehenden Weg einen Strecken- oder Polygonzug. Fallen Anfangs- und Endpunkt desselben zusammen, so heißt er geschlossen, genauer ein geschlossenes Polygon. Ist es doppelpunktfrei, so kann man nach dem letzten Satze von seinem Inneren und seinem Äußeren sprechen.

Späterer Verwendung wegen beweisen wir noch die beiden folgenden Hilfssätze.

Hilfssatz 1. *Jedes beliebige geschlossene Polygon* $\mathfrak{p}$ *läßt sich in eine endliche Anzahl geschlossener doppelpunktfreier Polygone und endlich viele hin und her durchlaufene Strecken zerlegen. Jedes der ersteren wird ganz im positiven oder ganz im negativen Sinne umlaufen.*

Beweis: $\mathfrak{p}$ habe n Seiten. Für $n = 2$ und 3 ist der Satz offenbar richtig. Es sei also $n > 3$ und $\mathfrak{p}$ nicht doppelpunktfrei. Dann durchlaufe man $\mathfrak{p}$, von einem Doppelpunkt A ausgehend, im Sinne der Orientierung bis man zum ersten Male nach A zurückkommt. Dann zerfällt $\mathfrak{p}$ in das dabei durchlaufene Polygon $\mathfrak{p}_1$ und in das restliche Polygon $\mathfrak{p}_2$. Wir werden zeigen, daß $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ bei geeigneter Wahl von A weniger Seiten enthalten als $\mathfrak{p}$. Das würde den Beweis durch Induktion vollenden.

Liegt nämlich das zunächst gewählte A auf einer mehrfach durchlaufenen Strecke, so ist mindestens einer ihrer Endpunkte ein mehrfacher Punkt, und man kann A, wenn nötig,

[1]) Der Richtungswinkel eines Strahles OP, der von einem festen, innerhalb der Kurve gelegenen Punkte O nach einem die Kurve einmal durchlaufenden Punkte P gezogen ist, ändert sich dabei um 2π, andernfalls um -2π.

nach diesem Endpunkt verschieben. Man darf also annehmen, daß A ein mehrfacher Punkt, aber zugleich gemeinsamer Endpunkt aufeinanderfolgender Seiten s_1 und s_2 ist. Hieraus allein folgt aber, daß $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ je eine dieser Seiten enthalten. Denn führt s_1 im Sinne der Orientierung von A weg, so kommt man, weil A mehrfacher Punkt sein sollte, nach A zurück, bevor man die der Seite s_1 vorangehende Seite s_2 (d. h. einen vollen Umlauf) durchlaufen hat. Jene gehört also zu $\mathfrak{p}_1$, diese zu $\mathfrak{p}_2$. Gehört aber A zu keiner mehrfach durchlaufenen Strecke, ist A auch von keiner Seite ein Endpunkt, sondern innerer Punkt etwa der Seite s, so enthalten $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ je eine der an s anstoßenden Seiten. Denn zu demselben Punkt einer bestimmten Seite kehrt man erst nach einem vollen Umlauf um $\mathfrak{p}$ zurück. In beiden Fällen enthalten sie also weniger als n Seiten.

Hilfssatz 2. *Jedes doppelpunktfreie geschlossene Polygon läßt sich durch Diagonalen, die sich nicht schneiden und in seinem Innern verlaufen, in Dreiecke zerlegen.*

Da dieser Satz für Vierecke (mag es eine einspringende Ecke besitzen oder nicht; s. Fig. 2, S. 55) klar ist, so können wir den Satz durch Induktion beweisen: $\mathfrak{p}$ habe $n(>4)$ Ecken und der Satz sei für Polygone mit weniger als n Ecken schon bewiesen. Dann genügt es zu zeigen, daß $\mathfrak{p}$ durch eine in seinem Innern verlaufende Diagonale in zwei Teilpolygone zerlegt werden kann, da diese dann beide weniger als n Ecken haben. Daß dies möglich ist, erkennt man so: Man bewege eine Gerade, die das Polygon nicht trifft, parallel mit sich selbst an das Polygon heran, bis sie einen ersten Punkt und also auch eine Ecke A mit ihm gemeinsam hat. Der bei A liegende Innenwinkel des Polygons ist dann kleiner als zwei Rechte. Sind B und C die Nachbarecken zu A, so ist entweder BC selbst eine ganz im Innern von $\mathfrak{p}$ verlaufende Diagonale oder im Dreieck ABC liegen noch weitere Ecken von $\mathfrak{p}$. Diejenige (oder eine derjenigen) von ihnen, die am weitesten weg von BC liegt,

heiße D. Dann ist AD eine im Innern von $\mathfrak{p}$ verlaufende Diagonale.

2. Eine offene und zusammenhängende Punktmenge (s. § 3, 8. u. 9.) nennt man ein **Gebiet.**

Nach dieser Definition werden einem Gebiete seine Randpunkte **nicht** zugerechnet. Soll dies trotzdem geschehen, so wird das Gebiet stets ausdrücklich als ein abgeschlossenes Gebiet (oder Bereich) bezeichnet werden.

Ein Gebiet kann hiernach sehr mannigfache Gestalt haben. Neben so einfachen wie dem (offenen) Innengebiet eines Kreises, einer Halbebene, eines einfachen Polygons, einer einfachen, geschlossenen Jordankurve, ... ist z. B. auch die folgende Punktmenge ein Gebiet: Aus der oberen Halbebene $\Im(z) > 0$ schließe man alle Punkte aus, die auf den Loten von der Länge 1 liegen, welche man auf der reellen Achse in den dort gelegenen Punkten 0 und $\pm 1/n$, $(n = 1, 2, \ldots)$ errichtet hat. — Man beachte, daß man bei diesem Gebiete den Randpunkt 0 auf keinem im Gebiete selbst verlaufenden Wege erreichen kann!

Unter den Gebieten heben wir diejenigen hervor, die einfach-zusammenhängend sind, d. h. bei denen jeder im Gebiete verlaufende doppelpunktfreie geschlossene Weg nur Punkte des Gebietes selbst (also keine Randpunkte) einschließt.

Kreis, Dreieck usw. sind einfach zusammenhängend, ebenso das Innere einer geschlossenen Jordankurve. Das Zwischengebiet zwischen zwei konzentrischen Kreisen dagegen ist es nicht; auch das Gebiet $|z| > 0$ ist es nicht.

Für später brauchen wir noch den folgenden

Hilfssatz 3. *Liegt im Gebiet* $\mathfrak{G}$ *ein Weg* $\mathfrak{k}$ *(oder allgemeiner eine kompakte Punktmenge), so gibt es eine positive Zahl* ϱ, *so daß jeder Punkt des Weges vom Rande des Gebietes einen Abstand* $> \varrho$ *hat;* $\mathfrak{k}$ *kommt dem Rande von* $\mathfrak{G}$ *nicht beliebig nahe.*

Beweis. Da jeder Punkt z von $\mathfrak{k}$ in $\mathfrak{G}$ liegt, gehört auch eine kreisförmige Umgebung desselben, deren Radius ϱ_z sei, ganz zu $\mathfrak{G}$. Man ordne nun jedem dieser Punkte den Kreis um ihn mit $\frac{1}{2}\varrho_z$ zu. Von diesen Kreisen genügen nach dem Heine-Borelschen Satz endlich viele, um $\mathfrak{k}$ zu überdecken. Ist ϱ der Radius des kleinsten unter ihnen, so genügt ϱ den Bedingungen des Satzes, da ja ein Kreis mit ϱ selbst dann noch ganz in $\mathfrak{G}$ liegt, wenn sein Mittelpunkt auf der Peripherie eines jener endlich vielen Überdeckungskreise liegt.

3. Eine (nicht leere) abgeschlossene, beschränkte und zusammenhängende Punktmenge (s. § 3, 7. u. 9.) nennt man ein **Kontinuum.** Auch eine Menge, die nur aus einem Punkt besteht, spricht man als Kontinuum an.

Da Kontinuen die mannigfachsten Gestalten haben können, ist es oft vorteilhaft, wenn man sie angenähert durch übersichtlichere Gebilde ersetzen kann. Wir nennen in dieser Hinsicht den folgenden Hilfssatz, dessen Beweis wir übergehen, da er bei voller Allgemeinheit (ähnlich wie der des Jordanschen Kurvensatzes) Schwierigkeiten macht, während er bei einfachen Mengen fast selbstverständlich ist:

Hilfssatz 4. *Ist $\mathfrak{K}$ ein Kontinuum, so besteht die Komplementärmenge von $\mathfrak{K}$ aus einem oder mehreren Gebieten. Genau eines von ihnen — es werde $\mathfrak{G}$ genannt — enthält beliebig entfernte Punkte der Ebene. Man nennt es das durch $\mathfrak{K}$ bestimmte Außengebiet. Ist nun $\mathfrak{K}$ eine stetige geschlossene Kurve* (s. 1.) *und wird $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt, so läßt sich stets ein doppelpunktfreies geschlossenes Polygon $\mathfrak{p}$ angeben, das in $\mathfrak{G}$ so verläuft, daß $\mathfrak{K}$ im Innengebiet von $\mathfrak{p}$ liegt, daß jeder Punkt von $\mathfrak{p}$ einen Abstand $< \varepsilon$ von $\mathfrak{K}$ und jeder Randpunkt von $\mathfrak{G}$ einen Abstand $< \varepsilon$ von $\mathfrak{p}$ hat.*

Ist $\mathfrak{A}$ eine beliebige in $\mathfrak{G}$ gelegene abgeschlossene Menge, so kann hierbei durch Wahl eines hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$ erreicht werden, daß $\mathfrak{A}$ im Außengebiet von $\mathfrak{p}$ liegt.

2. Kapitel. Funktionen einer komplexen Veränderlichen

§ 5. Begriff der allgemeinsten (eindeutigen) Funktion einer komplexen Veränderlichen

Ist $\mathfrak{M}$ eine beliebige Punktmenge und kann z einen beliebigen Punkt derselben bedeuten, so heißt z eine (komplexe) Veränderliche (Variable) und $\mathfrak{M}$ ihr Variabilitätsbereich.

Besteht nun eine Vorschrift, vermöge deren jedem Punkt z aus $\mathfrak{M}$ ein bestimmter neuer Zahlenwert w zugeordnet wird, so heißt w eine (eindeutige) Funktion der (komplexen) Veränderlichen z; in Zeichen

$$w = f(z),$$

indem „f" symbolisch für die irgendwie gegebene Zuordnungsvorschrift gesetzt wird. $\mathfrak{M}$ heißt der Definitionsbereich der Funktion und z das Argument derselben. Die Gesamtheit der Werte w, die den Punkten z von $\mathfrak{M}$ zugeordnet werden, nennt man den Wertevorrat der Funktion (auf $\mathfrak{M}$). Statt f sind auch beliebige andere Zeichen statthaft; im folgenden werden F, g, h, φ usw. viel benutzt werden.

Denkt man sich z und w in ihren reellen und imaginären Teil zerlegt: $z = x + iy$, $w = u + iv$, so kann die Beziehung

$$w = f(z)$$

auch so gedeutet werden, daß dem Paare reeller Zahlen x und y zwei neue reelle Zahlen u und v durch gewisse Vorschriften zugeordnet werden. u und v erscheinen also als zwei reelle Funktionen der beiden reellen Veränderlichen x und y; wir setzen

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y),$$

so daß also

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

ist. Man nennt u den reellen, v den imaginären Teil der

Funktion $f(z)$, und diese erscheint hiernach lediglich als die Zusammenfassung zweier reeller Funktionen von zwei reellen Veränderlichen. Es ist manchmal von Vorteil, diese Auffassung in den Vordergrund zu stellen — z. B. in § 7 und 10 werden wir das tun —; im allgemeinen aber kann der eigentliche Kern der Sache besser erkannt werden, wenn diese Trennung unterbleibt und $w = f(z)$ als eine Funktion der einen komplexen Veränderlichen z betrachtet wird.

Wir nehmen an, daß der Leser mit den sog. elementaren Funktionen schon einigermaßen vertraut ist, also mit den rationalen (insbesondere den linearen) Funktionen, der Exponentialfunktion e^z, den trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen und mit deren Umkehrungen (s. Elem., II. u. V. Abschn.). In diesen Fällen ist $\mathfrak{M}$ entweder die ganze Ebene (so bei e^z, $\sin z$, $\mathfrak{Sin}\, z$) oder die Ebene mit Ausnahme gewisser Punkte; die Zuordnungsvorschrift besteht in einem expliziten Ausdruck, d. h. der einem z aus $\mathfrak{M}$ zugeordnete Funktionswert w kann direkt durch Anwendung der vier Spezies in endlicher oder unendlicher[1]) Zahl errechnet werden.

Zur Veranschaulichung einer solchen Funktion denkt man sich entweder den Punkt $w = f(z)$ als Bild des Punktes z in einer w-Ebene markiert (s. Elem. § 37) oder an jeden Punkt z den zugehörigen Wert $w = f(z)$ „angeheftet", den Definitionsbereich der Funktion also mit Funktionswerten „belegt" oder den Vektor w im Punkte z angetragen.

Die Zuordnungsvorschrift kann aber auch ganz anders gegeben werden. Um nur irgendein extremes Beispiel zu nennen, sei etwa $\mathfrak{M}$ die Menge aller derjenigen Zahlen $z = x + iy$, für die x und y rationale Zahlen sind, und es werde festgesetzt, daß $f(z) = 1$, oder $= 2, \ldots$ oder $= n$ sein soll, je nachdem die periodisch gemachte Dezimalbruchentwicklung von y eine 1- oder 2-, ... oder n-ziffrige Periode hat.

---

[1]) In diesem Falle muß der betreffende Grenzprozeß — es handelt sich meist um unendliche (Potenz-)Reihen — natürlich konvergieren.

Es ist, wie sogleich ausdrücklich betont werden soll, durchaus nicht notwendig, daß eine Funktion gerade durch einen expliziten Ausdruck gegeben werde; sie kann auch auf sehr mannigfache andere Weise gegeben sein, — nur muß auf Grund der Definition jedem z aus $\mathfrak{M}$ der Funktionswert w in völlig unzweideutiger Weise zugeordnet sein.

Man erkennt hieraus, daß der aufgestellte Funktionsbegriff überaus weit ist, so weit, daß er kaum von allgemeinen Sätzen und Gesetzen beherrscht sein kann. Es wird unsere Aufgabe sein, die Voraussetzungen in geeigneter Weise so einzuschränken, daß aus der Gesamtheit aller Funktionen eine zwar speziellere, aber besonders wertvolle Klasse von Funktionen ausgesondert werde, wertvoll im Hinblick auf ihre Anwendbarkeit in Mathematik und Naturwissenschaften.

Es ist nun das außerordentlich überraschende, daß dieses Ziel schon durch eine einzige und ganz natürliche Forderung, nämlich durch die Forderung, daß unsere Funktionen *differenzierbar* sein sollen, erreicht wird und daß die Eigenschaft der Differenzierbarkeit ganz unerwartet weitgehende Folgen für die Natur der Funktion hat, — sehr viel weitergehende als im Falle reeller Funktionen.

Die *Differenzierbarkeit*, die formal genau wie im Reellen definiert wird, setzt wie dort die *Stetigkeit* voraus. Auch diese beiden Begriffe und ihre einfachsten Eigenschaften sehen wir als bekannt an (s. Elem., IV. Abschn.). Doch soll in dem folgenden Paragraphen das Wichtigste darüber zusammengestellt werden.

§ 6. Stetigkeit und Differenzierbarkeit

I. Wir verlangen zunächst, daß der Variabilitätsbereich $\mathfrak{M}$ im Sinne von § 4, 2 ein Gebiet $\mathfrak{G}$ sei[1]). Da dann z mit jedem Punkt von $\mathfrak{G}$ auch jeden Punkt einer Umgebung desselben,

[1]) Es genügt für das folgende meist, wenn man sich unter $\mathfrak{G}$ das Innere eines Kreises vorstellt.

Funktion $f(z)$, und diese erscheint hiernach lediglich als die Zusammenfassung zweier reeller Funktionen von zwei reellen Veränderlichen. Es ist manchmal von Vorteil, diese Auffassung in den Vordergrund zu stellen — z. B. in § 7 und 10 werden wir das tun —; im allgemeinen aber kann der eigentliche Kern der Sache besser erkannt werden, wenn diese Trennung unterbleibt und $w = f(z)$ als eine Funktion der einen komplexen Veränderlichen z betrachtet wird.

Wir nehmen an, daß der Leser mit den sog. elementaren Funktionen schon einigermaßen vertraut ist, also mit den rationalen (insbesondere den linearen) Funktionen, der Exponentialfunktion e^z, den trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen und mit deren Umkehrungen (s. Elem., II. u. V. Abschn.). In diesen Fällen ist $\mathfrak{M}$ entweder die ganze Ebene (so bei e^z, $\sin z$, $\mathfrak{Sin}\, z$) oder die Ebene mit Ausnahme gewisser Punkte; die Zuordnungsvorschrift besteht in einem expliziten Ausdruck, d. h. der einem z aus $\mathfrak{M}$ zugeordnete Funktionswert w kann direkt durch Anwendung der vier Spezies in endlicher oder unendlicher[1]) Zahl errechnet werden.

Zur Veranschaulichung einer solchen Funktion denkt man sich entweder den Punkt $w = f(z)$ als Bild des Punktes z in einer w-Ebene markiert (s. Elem. § 37) oder an jeden Punkt z den zugehörigen Wert $w = f(z)$ „angeheftet", den Definitionsbereich der Funktion also mit Funktionswerten „belegt" oder den Vektor w im Punkte z angetragen.

Die Zuordnungsvorschrift kann aber auch ganz anders gegeben werden. Um nur irgendein extremes Beispiel zu nennen, sei etwa $\mathfrak{M}$ die Menge aller derjenigen Zahlen $z = x + iy$, für die x und y rationale Zahlen sind, und es werde festgesetzt, daß $f(z) = 1$, oder $= 2, \ldots$ oder $= n$ sein soll, je nachdem die periodisch gemachte Dezimalbruchentwicklung von y eine 1- oder 2-, ... oder n-ziffrige Periode hat.

---

[1]) In diesem Falle muß der betreffende Grenzprozeß — es handelt sich meist um unendliche (Potenz-)Reihen — natürlich konvergieren.

Es ist, wie sogleich ausdrücklich betont werden soll, durchaus nicht notwendig, daß eine Funktion gerade durch einen expliziten Ausdruck gegeben werde; sie kann auch auf sehr mannigfache andere Weise gegeben sein, — nur muß auf Grund der Definition jedem z aus $\mathfrak{M}$ der Funktionswert w in völlig unzweideutiger Weise zugeordnet sein.

Man erkennt hieraus, daß der aufgestellte Funktionsbegriff überaus weit ist, so weit, daß er kaum von allgemeinen Sätzen und Gesetzen beherrscht sein kann. Es wird unsere Aufgabe sein, die Voraussetzungen in geeigneter Weise so einzuschränken, daß aus der Gesamtheit aller Funktionen eine zwar speziellere, aber besonders wertvolle Klasse von Funktionen ausgesondert werde, wertvoll im Hinblick auf ihre Anwendbarkeit in Mathematik und Naturwissenschaften.

Es ist nun das außerordentlich überraschende, daß dieses Ziel schon durch eine einzige und ganz natürliche Forderung, nämlich durch die Forderung, daß unsere Funktionen *differenzierbar* sein sollen, erreicht wird und daß die Eigenschaft der Differenzierbarkeit ganz unerwartet weitgehende Folgen für die Natur der Funktion hat, — sehr viel weitergehende als im Falle reeller Funktionen.

Die *Differenzierbarkeit*, die formal genau wie im Reellen definiert wird, setzt wie dort die *Stetigkeit* voraus. Auch diese beiden Begriffe und ihre einfachsten Eigenschaften sehen wir als bekannt an (s. Elem., IV. Abschn.). Doch soll in dem folgenden Paragraphen das Wichtigste darüber zusammengestellt werden.

§ 6. Stetigkeit und Differenzierbarkeit

I. Wir verlangen zunächst, daß der Variabilitätsbereich $\mathfrak{M}$ im Sinne von § 4, 2 ein Gebiet $\mathfrak{G}$ sei[1]). Da dann z mit jedem Punkt von $\mathfrak{G}$ auch jeden Punkt einer Umgebung desselben,

[1]) Es genügt für das folgende meist, wenn man sich unter $\mathfrak{G}$ das Innere eines Kreises vorstellt.

also jeden hinreichend nahe bei ihm gelegenen Punkt, bedeuten darf, so sagt man, z sei eine stetige Veränderliche (in $\mathfrak{G}$). Eine in $\mathfrak{G}$ erklärte Funktion $w = f(z)$ soll nun an einer Stelle ζ von $\mathfrak{G}$ stetig genannt werden, wenn sie die eine oder andere der folgenden Bedingungen erfüllt, die genau das gleiche besagen und formal dieselben sind wie im Reellen:

1. Form. *Es existiert*

$$\lim_{z \to \zeta} f(z) \text{ und ist } = f(\zeta); \tag{1}$$

oder also: *Nach Wahl von* $\varepsilon > 0$ *soll es möglich sein, eine Zahl* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *so anzugeben, daß mit* $\omega = f(\zeta)$

$$| w - \omega | = | f(z) - f(\zeta) | < \varepsilon \tag{2}$$

ist für alle z, *für die*

$$| z - \zeta | < \delta$$

ist. Dafür kann man auch (unschärfer, aber das Wesentliche gut hervorhebend) sagen:

2. Form. *Die Funktionswerte* $f(z)$ *unterscheiden sich von dem Werte* $f(\zeta)$ *um beliebig wenig, wenn nur* z *hinreichend nahe bei* ζ *liegt.*

3. Form. *Wenn man eine ganz beliebige Zahlenfolge* $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ *aus* $\mathfrak{G}$ *wählt, für die nur* $z_n \to \zeta$ *strebt, so gilt für die entsprechenden Funktionswerte* $w_n = f(z_n)$ *stets*

$$w_n \to \omega = f(\zeta). \tag{3}$$

Ist eine Funktion $f(z)$ an jeder Stelle eines Gebietes stetig, so heißt sie kurz in diesem Gebiet stetig.

Zuweilen sind die auftretenden Funktionen auch noch in dem einen oder anderen Randpunkte von $\mathfrak{G}$ definiert. Dann versteht man unter der Stetigkeit der Funktion $f(z)$ in einem Randpunkte ζ von $\mathfrak{G}$ dies: Es sollen die Stetigkeitsbedingungen wenigstens dann erfüllt sein, wenn die in ihnen vorkommenden z noch in $\mathfrak{G}$ liegen.

Man spricht in diesem Sinne wohl von einer Stetigkeit nach innen. In ähnlicher Weise spricht man auch von einer Stetigkeit längs eines Weges und meint damit, daß die Stetigkeitsbedingungen nur für alle auf dem betreffenden Wege gelegenen Punkte erfüllt sind — ohne Rücksicht auf die Werte der Funktion in anderen Punkten.

Läßt sich einer Randstelle ζ des Definitionsgebietes $\mathfrak{G}$ — nötigenfalls unter Abänderung eines dort schon erklärten Funktionswertes — ein Wert $\omega = f(\zeta)$ so zuordnen, daß $f(z)$ nunmehr in ζ nach innen stetig ist, so sagt man, die Funktion $f(z)$ nehme in ζ den Randwert ω an. Es ist dies offenbar dann und nur dann der Fall, wenn $\lim f(z)$ für aus dem Innern von $\mathfrak{G}$ gegen ζ rückendes z existiert.

Für die im vorigen Paragraphen eingeführten Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ bedeutet die Stetigkeit von $f(z)$ ersichtlich, daß sie ihrerseits stetige (reelle) Funktionen des Variablenpaares (x, y) sein sollen.

Wie für diese, so gilt auch für unsere stetigen Funktionen einer komplexen Veränderlichen der **Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit:**

Satz. *Ist $f(z)$ in einem abgeschlossenen und beschränkten Gebiete $\overline{\mathfrak{G}}$ stetig, so ist es nach Wahl von ε stets möglich, eine Zahl $\delta = \delta(\varepsilon)$ so anzugeben, daß für irgend zwei Punkte z' und z'' aus $\overline{\mathfrak{G}}$, deren Abstand $|z'' - z'| < \delta$ ist, die Differenz der zugehörigen Funktionswerte*

$$|w'' - w'| = |f(z'') - f(z')| < \varepsilon$$

ausfällt.

Beweis: Um jeden Punkt z von $\overline{\mathfrak{G}}$ läßt sich, da $f(z)$ in ihm stetig ist, ein Kreis legen, dessen Radius wir mit ϱ_z bezeichnen, so daß in ihm die Schwankung[1]) der Funktion

[1]) D. h. die obere Grenze der Werte $|f(z_2) - f(z_1)|$ für irgend zwei Punkte z_1 und z_2 des betreffenden Kreises, die auch in $\mathfrak{G}$ liegen.

$< \varepsilon$ ist. Wir ordnen nun wie beim Beweise von Hilfssatz 3 in § 4 jedem z aus $\overline{\mathfrak{G}}$ den Kreis um ihn mit $\frac{1}{2}\varrho_z$ zu. Von diesen genügen nach dem Heine-Borelschen Satze schon endlich viele, um $\overline{\mathfrak{G}}$ zu überdecken. Ist der Radius des kleinsten von ihnen $= \delta$, so genügt diese Zahl den Bedingungen des Satzes; denn ist $|z'' - z'| < \delta$ und wird z' etwa von dem Kreise mit $\frac{1}{2}\varrho_\zeta$ um ζ überdeckt, so ist $\delta \leqq \frac{1}{2}\varrho_\zeta$, und es liegen folglich z' und z'' in dem Kreise mit ϱ_ζ um ζ, so daß $|f(z'') - f(z')| < \varepsilon$ ist.

II. Die Erklärung der Differenzierbarkeit — auch sie ist formal ganz die gleiche wie im Reellen — kleiden wir wieder in drei verschiedene Formen. Eine in $\mathfrak{G}$ erklärte Funktion $w = f(z)$ soll an einer Stelle ζ von $\mathfrak{G}$ differenzierbar genannt werden, wenn sie die eine oder andere der folgenden drei untereinander äquivalenten Bedingungen erfüllt:

1. Form. *Es existiert*

$$\lim_{z \to \zeta} \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta}. \tag{4}$$

Dieser Grenzwert wird dann mit $f'(\zeta)$ oder $\left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=\zeta}$ bezeichnet und die Ableitung oder der Differentialquotient von $f(z)$ an der Stelle ζ genannt. Oder also: *Der Stelle ζ läßt sich eine neue Zahl $f'(\zeta)$ so zuordnen, daß nach beliebiger Wahl von $\varepsilon > 0$ sich ein $\delta = \delta(\varepsilon)$ immer so bestimmen läßt, daß*

$$\left| \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} - f'(\zeta) \right| < \varepsilon \tag{5}$$

ist für alle z aus $\mathfrak{G}$ mit $0 < |z - \zeta| < \delta$. Setzt man $f'(\zeta) = c$, $z - \zeta = l$, so kann dies auch so ausgesprochen werden: Für alle dem Betrage nach hinreichend kleinen l ist

$$f(\zeta + l) - f(\zeta) = cl + rl, \tag{6}$$

wenn $r = r(l)$ eine Funktion von l bedeutet (nämlich die in

(5) zwischen den Betragzeichen stehende), die für $l \to 0$ selbst $\to 0$ strebt. — Dafür kann man wieder (etwas unschärfer) sagen:

2. Form. *Für alle hinreichend nahe an ζ gelegenen $z \neq \zeta$ aus $\mathfrak{G}$ ist der Differenzenquotient*

$$\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta} = \frac{w-\omega}{z-\zeta} = \left(\frac{\Delta w}{\Delta z}\right)_{z,\,\zeta} \tag{7}$$

beliebig nahe bei einer bestimmten Zahl gelegen, die dann mit $f'(\zeta)$ usw. bezeichnet wird.

3. Form. *Wenn man eine ganz beliebige Zahlenfolge $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ aus $\mathfrak{G}$ wählt, deren Glieder sämtlich $\neq \zeta$ sind, die aber $\to \zeta$ streben, so soll die Folge der Zahlen*

$$\Delta_n = \frac{f(z_n)-f(\zeta)}{z_n-\zeta} \tag{8}$$

stets einem Grenzwert zustreben. Dieser ist dann von der Wahl der Folge (z_n) unabhängig und wird mit $f'(\zeta)$ usw. bezeichnet.

Die Regeln des Differenzierens, die alle formal die gleichen sind wie im Reellen, insbesondere die sogenannte „Kettenregel", sehen wir als bekannt an (s. Elem., IV. Abschn., 9. Kap.), ebenso die Veranschaulichung von Stetigkeit und Differenzierbarkeit bei der Deutung einer Funktion $w = f(z)$ als Abbildung des Definitionsgebietes der z-Ebene auf ein Gebiet der w-Ebene: Die Stetigkeit bedeutet, kurz gesagt, daß benachbarten Punkten in der z-Ebene auch benachbarte Punkte in der w-Ebene entsprechen, und die Differenzierbarkeit, daß die Abbildung konform ist (s. Elem., IV. Abschnitt, 10. Kap.).

Ist eine Funktion an jeder Stelle eines Gebietes differenzierbar, so sagt man kurz, sie sei in diesem Gebiete differenzierbar. Die Ableitung ist dann wiederum eine in diesem Gebiete definierte Funktion $f'(z)$.

Die in Gebieten differenzierbaren Funktionen sind es nun, auf die am Ende des vorigen Paragraphen schon hingewiesen

wurde und die sich als sehr bedeutsam erweisen werden. Wir heben sie darum durch eine besondere Bezeichnung hervor:

Erklärung. *Eine in einem Gebiete $\mathfrak{G}$ erklärte und dort überall differenzierbare Funktion wird eine in $\mathfrak{G}$ (eindeutige)* **reguläre analytische** *Funktion oder kürzer eine analytische oder eine reguläre (vielfach auch holomorphe) Funktion genannt. Das Gebiet $\mathfrak{G}$ wird ein Regularitätsgebiet der betreffenden Funktion genannt.*

Die Eigenschaft der Regularität kommt hiernach einer Funktion nur in Gebieten zu; doch sagt man auch von jedem einzelnen Punkte eines solchen, daß die Funktion in ihm regulär sei. Dann ist aber zu beachten, daß die Regularität in einem Punkte stets von selbst auch die Regularität in einer gewissen Umgebung desselben mit einschließt, da dieser Punkt eben ein **innerer** Punkt eines Regularitätsgebietes sein muß.

Alle oben genannten elementaren Funktionen sind in ihren Definitionsgebieten regulär; die Funktion $f(z) = \Re(z)$ ist, wie man leicht einsieht, zwar eine in der ganzen Ebene stetige, aber in keinem Gebiete eine reguläre Funktion.

Die Folge wird zeigen, daß die hiermit ausgesonderte Klasse von Funktionen von einer überraschend starken inneren Gesetzmäßigkeit und darum auch für alle Anwendungen in den mathematischen Naturwissenschaften von besonderer Wichtigkeit ist.

Aufgaben. 1. Man untersuche die folgenden beiden Funktionen in bezug auf ihre Stetigkeit und stelle bei beiden fest, in welchen Punkten sie stetig, in welchen sie unstetig sind:

α) $f(z) = 0$ für $z = 0$ und für alle diejenigen z, deren Betrag $|z|$ eine irrationale Zahl ist, dagegen $f(z) = 1/q$, wenn $|z| = p/q$ ist (p und q ganze positive und teilerfremde Zahlen).

β) $f(z) = 0$ für $z = 0$, $f(z) = \sin \vartheta$ für $z = r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$ nebst $r > 0$.

2. Sind die in der vorigen Aufgabe definierten Funktionen in gewissen Punkten differenzierbar? Sind es die Funktionen $f(z) = |z|$, $f(z) = \Re(z)$, $f(z) = \arc z$?

3. Die Funktion $f(z)$ sei innerhalb eines Kreises $\mathfrak{K}$ (allgemeiner: im Innengebiet eines geschlossenen, doppelpunktfreien Weges $\mathfrak{C}$) stetig und nehme in jedem Randpunkt ζ einen Randwert $f(\zeta)$ an. Man zeige, daß diese Randwerte $f(\zeta)$ eine längs $\mathfrak{K}$ (bzw. $\mathfrak{C}$) stetige Funktion bilden.

§ 7. Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

Um zu erkennen, was die Forderung der Differenzierbarkeit von $f(z) = u + iv$ an der Stelle $\zeta = \xi + i\eta$ für die beiden Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ bedeutet, erinnern wir zunächst an den Begriff der (vollständigen) Differenzierbarkeit einer reellen Funktion $u(x, y)$ der reellen Veränderlichen x und y an einer Stelle (ξ, η), an der und in deren Umgebung sie definiert ist: $u(x, y)$ heißt in (ξ, η) vollständig differenzierbar, wenn für alle dem Betrage nach hinreichend kleinen (reellen) h und k mit konstanten Zahlen α_1 und α_2

$$(1) \quad u(\xi + h, \eta + k) - u(\xi, \eta) = \alpha_1 h + \alpha_2 k + \varrho_1 h + \varrho_2 k$$

gesetzt werden kann und hierbei $\varrho_1 = \varrho_1(h, k)$ und $\varrho_2 = \varrho_2(h, k)$ für $(h, k) \to (0, 0)$ ihrerseits $\to 0$ streben. Ist u in (ξ, η) vollständig differenzierbar, so ist u dort auch partiell differenzierbar, und es ist an der Stelle (ξ, η), wie man für $k = 0, h \to 0$ bzw. $h = 0, k \to 0$ erkennt, $u_x = \alpha_1, u_y = \alpha_2$.

Die aufgeworfene Frage wird dann durch den folgenden Satz beantwortet:

Satz 1. *Die Funktion $f(z) = u + iv$ ist dann und nur dann an der Stelle $\zeta = \xi + i\eta$, an der und in deren Umgebung sie erklärt ist, differenzierbar und hat dort die Ableitung $c = \alpha + i\beta$, wenn die Funktionen $u = u(x, y)$ und $v = v(x, y)$ an der Stelle (ξ, η) vollständig differenzierbar sind und ihre partiellen Ableitungen dort die Werte*

$$(2) \qquad u_x = \alpha, \; u_y = -\beta, \; v_x = \beta, \; v_y = \alpha$$

haben.

Beweis. I. Ist $f'(\zeta) = c$, so heißt dies (s. § 6, (6)), daß für alle dem Betrage nach hinreichend kleinen (komplexen) $l = h + ik$

$$f(\zeta + l) - f(\zeta) = cl + rl \tag{3}$$

gesetzt werden kann und dabei $r = r(l)$ eine Funktion bedeutet, die für $l \to 0$ selbst $\to 0$ strebt. Setzt man $r(l) = r(h + ik) = \varrho(h, k) + i\sigma(h, k)$ und zerlegt (3) in Real- und Imaginärteil, so erhält man die beiden Gleichungen

$$\begin{cases} u(\xi + h, \eta + k) - u(\xi, \eta) = \alpha h - \beta k + \varrho h - \sigma k, \\ v(\xi + h, \eta + k) - v(\xi, \eta) = \beta h + \alpha k + \sigma h + \varrho k. \end{cases} \tag{4}$$

Da mit $r(l) \to 0$ auch $\varrho(h, k)$ und $\sigma(h, k) \to 0$ streben für $l = (h, k) \to 0$, so besagen diese Gleichungen genau, daß die im Satze über u und v gemachten Aussagen notwendig dafür sind, daß $f(z)$ in ζ differenzierbar und daß $f'(\zeta) = c$ ist.

II. Sind umgekehrt u und v in (ξ, η) vollständig differenzierbar und haben ihre partiellen Ableitungen die im Satz genannten Werte, so bestehen die Gleichungen (4) für alle dem Betrage nach hinreichend kleinen h und k. Doch können in der zweiten ϱ und σ möglicherweise andere Funktionen von (h, k) sein als in der ersten. Wir ersetzen sie darum in der zweiten durch die Zeichen $\bar{\varrho}$ und $\bar{\sigma}$. Setzt man $\alpha + i\beta = c$, $h + ik = l$, so folgt aus (4), daß nun

$$f(\zeta + l) - f(\zeta) = cl + (\varrho + i\bar{\sigma})\, h + (-\sigma + i\bar{\varrho})\, k$$

ist, oder also, wofern $l \neq 0$ ist, daß

$$f(\zeta + l) - f(\zeta) = cl + \left[(\varrho + i\bar{\sigma})\frac{h}{l} + (-\sigma + i\bar{\varrho})\frac{k}{l}\right] l$$

ist. Hierin strebt aber für $(h, k) = l \to 0$ die in der eckigen Klammer stehende Funktion von h und k selbst $\to 0$, da stets $|h/l| \leqq 1$ und $|k/l| \leqq 1$ ist. Nennen wir sie also $r = r(l)$, so lehrt der Vergleich mit der Formel (6) in § 6, daß

$f(z)$ in ζ differenzierbar ist und die Ableitung c hat. Die Bedingungen sind also auch hinreichend.

Betrachten wir nicht nur einen einzelnen Punkt, sondern alle Punkte eines Gebietes $\mathfrak{G}$, so folgt aus Satz 1 ohne weiteres der besonders bedeutsame

Satz 2. *Die in einem Gebiete $\mathfrak{G}$ erklärte Funktion $f(z) = u + iv$ ist dann und nur dann in $\mathfrak{G}$ regulär, wenn die Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ überall in $\mathfrak{G}$ vollständig differenzierbar sind und wenn zwischen ihren vier partiellen Ableitungen an jeder Stelle die Beziehungen*

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \tag{5}$$

bestehen.

Die wichtigen Gleichungen (5), denen der reelle Teil u und der imaginäre Teil v von $f(z)$ genügen müssen, wenn $f(z) = u + iv$ eine reguläre Funktion von $z = x + iy$ sein soll, heißen die **Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.** Ihre Bedeutung beruht, wie der Satz 2 zum Ausdruck bringt, darauf, daß sie sich — zusammen mit der vollständigen Differenzierbarkeit von u und v — als charakteristisch für die Regularität von $f(z)$ erwiesen haben: Zwei Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ sind dann und nur dann Real- und Imaginärteil einer in $\mathfrak{G}$ analytischen Funktion, wenn sie den Bedingungen von Satz 2 genügen[1]). Aus ihm geht insbesondere hervor, daß u und v nicht unabhängig voneinander gewählt werden können, daß sie vielmehr durch die Gleichungen (5) miteinander verkoppelt sind.

Setzen wir weiter voraus, daß auch die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung in $\mathfrak{G}$ existieren und stetig sind (in § 16 wird bewiesen werden, daß dies stets von selbst der Fall ist), so folgt aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen weiter:

[1]) Eine vertiefte Behandlung der durch Satz 2 beantworteten Frage bietet das S. 5 genannte Büchlein von D. Menchoff.

$$u_{xx} = v_{yx} \quad \text{und} \quad u_{yy} = -v_{xy} = -v_{yx},$$

also

(6) $u_{xx} + u_{yy} = 0$ und ebenso $v_{xx} + v_{yy} = 0$.

Die beiden Funktionen u und v genügen also ein und derselben Differentialgleichung — der sog. **Laplaceschen Differentialgleichung** — von der Form

(7) $\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$, für die man kurz $\Delta\varphi = 0$

zu schreiben pflegt. Aus den Gleichungen (6) geht hervor, daß weder der reelle noch der imaginäre Teil von $f(z)$ willkürlich gewählt werden kann, vielmehr muß jeder für sich der Laplaceschen und müssen beide zusammen den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen genügen.

Als leichte Folgerung aus den beiden Sätzen heben wir noch den folgenden Satz hervor, der, wie im Reellen, für die Integralrechnung wichtig ist:

Satz 3. *Ist eine Funktion $f(z)$ in einem Gebiete $\mathfrak{G}$ differenzierbar und ist ihre Ableitung dort überall $= 0$, so ist $f(z)$ in $\mathfrak{G}$ identisch konstant. Oder: Zwei Funktionen, die in demselben Gebiete regulär sind und deren Ableitungen dort übereinstimmen, unterscheiden sich dort nur um eine additive Konstante.*

Denn die beiden partiellen Ableitungen von u und ebenso die von v sind in $\mathfrak{G}$ überall $= 0$. Also sind u und v und daher ist auch $f(z)$ in $\mathfrak{G}$ identisch konstant.

Aufgaben. 1. Man stelle das Bestehen der Cauchy-Riemannschen und der Laplaceschen Differentialgleichung an den elementaren Funktionen fest, z. B. bei

$$f(z) = z,\ z^2,\ z^n,\ e^z,\ \sin z,\ \cos z,\ \operatorname{tg} z \text{ usw.}$$

2. Man beweise den Satz 3 dieses Paragraphen, ohne die Funktion $f(z)$ in ihren reellen und imaginären Teil zu zerlegen.

Zweiter Abschnitt

Integralsätze

3. Kapitel. Das Integral einer stetigen Funktion

§ 8. Definition des bestimmten Integrals

In der Integralrechnung wird das bestimmte Integral einer reellen stetigen Funktion $y = F(x)$ der reellen Veränderlichen x zwischen den Grenzen x_0 und X folgendermaßen definiert:

Man nimmt eine Zerlegung $\mathfrak{z}$ des Intervalles $x_0 \ldots X$ vor, d. h. man teilt es irgendwie in etwa n Teile. Die Teilpunkte seien

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = X.$$

In jedem der n Teilchen oder Intervalle $x_{\nu-1} \ldots x_\nu$ wählt man nun einen beliebigen Zwischenpunkt ξ_ν und bildet die Summe

$$S_{\mathfrak{z}} = \sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu - x_{\nu-1})\, F(\xi_\nu).$$

Es gibt dann eine bestimmte Zahl J mit folgender Eigenschaft: Nach Wahl von $\varepsilon > 0$ läßt sich ein $\delta = \delta(\varepsilon)$ so bestimmen, daß für jede Zerlegung $\mathfrak{z}$, bei der alle Teilchen $< \delta$ sind, jedesmal $|S_{\mathfrak{z}} - J| < \varepsilon$ ausfällt.

Diese Zahl J heißt das bestimmte Integral von $F(x)$ über $x_0 \ldots X$ und wird mit

$$J = \int_{x_0}^{X} F(x)\, dx$$

bezeichnet. Diese Definition des (reellen) bestimmten Integrals und ihre geometrische Deutung als Annäherung eines Flächeninhalts durch eine Summe von Rechtecken werde als bekannt angesehen.

Es sei nun $w = f(z)$ eine in einem Gebiete $\mathfrak{G}$ stetige Funktion von z (die Differenzierbarkeit ist einstweilen noch nicht not-

wendig); z_0 und Z seien zwei beliebige Punkte von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{k}$ ein ganz in $\mathfrak{G}$ verlaufender Weg, der sie verbindet. Dann gelangt man, formal ganz analog, zu folgender Definition des bestimmten Integrales der Funktion komplexen Argumentes $f(z)$ längs des Weges $\mathfrak{k}$ von z_0 bis Z:

Man nimmt eine Zerlegung $\mathfrak{z}$ des Weges $\mathfrak{k}$ vor, d. h. man teilt ihn irgendwie in etwa n Teile. Die Teilpunkte seien der Reihe nach $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z_n = Z$. Auf jedem der Wegteilchen $z_{\nu-1} \ldots z_\nu$ wählt man wieder einen beliebigen Zwischenpunkt ζ_ν und bildet die Summe

$$S_{\mathfrak{z}} = \sum_{\nu=1}^{n} (z_\nu - z_{\nu-1})\, f(\zeta_\nu).$$

Dann kann man auch hier wieder die Existenz einer bestimmten Zahl J mit folgender Eigenschaft beweisen: Nach Wahl von $\varepsilon > 0$ läßt sich ein $\delta = \delta(\varepsilon)$ so bestimmen, daß für jede Zerlegung des Weges $\mathfrak{k}$, bei der die Längen aller Teilchen $< \delta$ sind, jedesmal $|S_{\mathfrak{z}} - J| < \varepsilon$ ausfällt.

Diese Zahl J heißt das längs $\mathfrak{k}$ genommene bestimmte Integral von $f(z)$ und wird mit

$$\int_{z_0}^{Z}{}^{\mathfrak{k}} f(z)\, dz \quad \text{oder kurz mit} \quad \int^{\mathfrak{k}} f(z)\, dz$$

bezeichnet. — Eine einfache geometrische Deutung wie im Falle reeller Integrale ist hier nicht möglich.

§ 9. Existenzbeweis für das bestimmte Integral

Die in Rede stehenden Summen wollen wir der Kürze halber (n-teilige) S-Summen nennen; und wenn wir von einem Stück (a, b) des Weges sprechen, so wollen wir stets den auf dem (orientierten) Wege vorangehenden Punkt zuerst nennen.

Die am Ende des vorigen Paragraphen ausgesprochene Behauptung beweisen wir dann in drei Schritten:

I. Es sei $S_\mathfrak{z}$ eine bestimmte, etwa n-teilige S-Summe für den Weg $\mathfrak{k}$ und es habe $f(z)$ auf jedem der n Wegteile eine Schwankung $< \sigma$[1]). Geht man dann von $S_\mathfrak{z}$ dadurch zu einer neuen S-Summe $S_{\mathfrak{z}'}$ über, daß man zu den alten Teilpunkten neue hinzufügt (kurz: durch Weiterteilung), so ist, auch wenn bei $S_{\mathfrak{z}'}$ die Zwischenpunkte neu gewählt werden, stets

$$|S_{\mathfrak{z}'} - S_\mathfrak{z}| < l\sigma, \tag{1}$$

wenn l die Länge des Weges $\mathfrak{k}$ bedeutet.

Beweis. Das Teilchen $z_{\nu-1} \dots z_\nu$ der Zerlegung $\mathfrak{z}$, (ν fest, $1 \leqq \nu \leqq n$), sei beim Übergang zu $\mathfrak{z}'$ in p kleinere Teilchen zerlegt. Die Teilchen seien

$$z_{\nu-1} = z'_0, z'_1, \dots, z'_{p-1}, z'_p = z_\nu.$$

Der Summand $(z_\nu - z_{\nu-1}) f(\zeta_\nu)$ in der Summe $S_\mathfrak{z}$ muß dann, wenn $\zeta'_1, \dots, \zeta'_p$ die Zwischenpunkte auf den neuen Teilen sind, durch die Summe

$$(z'_1 - z'_0) f(\zeta'_1) + (z'_2 - z'_1) f(\zeta'_2) + \dots + (z'_p - z'_{p-1}) f(\zeta'_p)$$

ersetzt werden. Schreibt man aber $(z_\nu - z_{\nu-1}) f(\zeta_\nu)$ in der Form

$$(z'_1 - z'_0) f(\zeta_\nu) + (z'_2 - z'_1) f(\zeta_\nu) + \dots + (z'_p - z'_{p-1}) f(\zeta_\nu),$$

so erkennt man, daß die Differenz beider, da stets $|f(\zeta'_\lambda) - f(\zeta_\nu)| < \sigma$ sein sollte, dem Betrage nach

$$< \sigma (|z'_1 - z'_0| + |z'_2 - z'_1| + \dots + |z'_p - z'_{p-1}|) \leqq \sigma l_\nu$$

ist, wenn l_ν die Länge des Teilchens $z_{\nu-1} \cdots z_\nu$ bedeutet. Da das Entsprechende für jedes der n Teilchen der Zerlegung $\mathfrak{z}$ gilt, so folgt, daß

$$|S_{\mathfrak{z}'} - S_\mathfrak{z}| < \sigma (l_1 + l_2 + \dots + l_n) = \sigma l$$

ist, wie behauptet.

[1]) Das soll heißen: Für irgend zwei Punkte z' und z'', die auf demselben Teilchen des Weges liegen, ist stets $|f(z'') - f(z')| < \sigma$.

II. Wir zeigen jetzt, daß nach Wahl von $\varepsilon > 0$ sich ein $\delta = \delta(\varepsilon)$ so bestimmen läßt, daß, wenn S' und S'' irgend zwei S-Summen sind, bei deren Zerlegungen alle Teile des Weges $< \delta$ sind, stets

$$|S' - S''| < \varepsilon/2 \tag{2}$$

ausfällt.

Beweis: Man wähle δ nach dem Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit (s. § 6, I) so, daß für irgend zwei Punkte z' und z'' des Weges $\mathfrak{k}$ stets $|f(z'') - f(z')| < \varepsilon/(4l)$ ist, falls $|z'' - z'| < \delta$ ist. Sind dann S' und S'' irgend zwei S-Summen, bei deren Zerlegungen alle Teile des Weges $< \delta$ sind, so bilde man aus den bei ihnen benutzten Zerlegungen dadurch eine dritte (feinere) Zerlegung, daß die Teilpunkte aus den beiden ersten Zerlegungen genommen werden. Dann geht die dritte ersichtlich aus ihnen beiden durch Weiterteilung hervor. Daher ist, wenn S^* eine beliebige, zur dritten Zerlegung gehörige S-Summe bedeutet, nach I:

$$|S' - S^*| < l \cdot \varepsilon/(4l) = \varepsilon/4$$

und ebenso

$$|S'' - S^*| < \varepsilon/4,$$

also

$$|S' - S''| \leqq |S' - S^*| + |S'' - S^*| < \varepsilon/2. \text{ w. z. b. w.}$$

III. Es sei nun $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots, \mathfrak{z}_k, \ldots$ eine Folge unbegrenzt feiner werdender Zerlegungen des Weges $\mathfrak{k}$, d. h. es soll, wenn l_k die Länge des längsten Teilchens bei der Zerlegung $\mathfrak{z}_k$ bedeutet, $l_k \to 0$ streben. Ist dann S_k für $k = 1, 2, \ldots$ irgendeine zur Zerlegung $\mathfrak{z}_k$ gehörige S-Summe, so ist

$$\lim_{k \to \infty} S_k \tag{3}$$

vorhanden.

Beweis. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so bestimme man δ nach II und dann k_0 so groß, daß die Längen aller Teilchen aller

S_k mit $k \geqq k_0$ kleiner als δ sind. Dann ist auf alle diese S_k das Ergebnis von II anwendbar, d. h. es ist

$$|S_{k+p} - S_k| < \varepsilon/2 \tag{4}$$

für alle $k > k_0$ und alle $p \geqq 1$. Hiernach ist aber (s. § 3, Satz 4) $\lim S_k$ vorhanden.

Setzt man diesen Grenzwert $= J$, so gilt nun endlich der am Ende von § 6 behauptete

Satz. *Ist $\varepsilon > 0$ gegeben und $\delta = \delta(\varepsilon)$ gemäß* II *bestimmt, so gilt für jedwede S-Summe $S_\mathfrak{z}$, bei der nur die Längen aller Wegteilchen $< \delta$ sind, die Beziehung*

$$|S_\mathfrak{z} - J| < \varepsilon. \tag{5}$$

Wir wollen dafür kurz sagen, daß die Summen $S_\mathfrak{z}$ bei unbegrenzter Verfeinerung der Zerlegungen $\mathfrak{z}$ gegen die Zahl J als ihren Grenzwert streben, in Zeichen:

$$\lim S_\mathfrak{z} = J. \tag{6}$$

Beweis. Nach (2) ist

$$|S_\mathfrak{z} - S'| < \varepsilon/2,$$

wenn auch S' eine S-Summe ist, die zu einer Zerlegung gehört, bei der alle Teilchen $< \delta$ sind. Setzt man hier für S' eine der S-Summen S_k aus III mit $k > k_0$ ein, so ergibt sich, daß für diese k auch

$$|S_\mathfrak{z} - S_k| < \varepsilon/2$$

ist. Für $k \to \infty$ liefert dies nach III, daß $|S_\mathfrak{z} - J| \leqq \varepsilon/2$ und daß also die Behauptung (5) richtig ist.

Damit ist die Existenz der Zahl J mit den behaupteten Eigenschaften, d. h. also die Existenz des bestimmten Integrales, vollständig bewiesen.

Bemerkungen. 1. Bei unserem Beweise wurde nur die Stetigkeit von $f(z)$ längs $\mathfrak{k}$, nicht auch diejenige in $\mathfrak{G}$ benutzt. Außerhalb des Weges $\mathfrak{k}$ brauchte also $f(z)$ gar nicht definiert zu sein.

2. Unser Integralbegriff enthält als Spezialfall wieder das reelle Integral einer reellen stetigen Funktion (vgl. § 8, An-

fang). Man hat sich, um dies zu erkennen, nur unter $\mathfrak{k}$ ein Stück der reellen Achse und unter $f(z)$ eine dort reellwertige stetige Funktion zu denken.

Aufgabe. Es sei $F(z)$ eine längs $\mathfrak{k}$ stetige Funktion von z. Man zeige, daß auch die Summen

$$S_{\mathfrak{z}} = \sum_{\nu=1}^{n} |z_\nu - z_{\nu-1}| F(\zeta_\nu)$$

sich in demselben Sinne wie die Summen $S_{\mathfrak{z}}$ bei unbegrenzter Verfeinerung der Zerlegungen $\mathfrak{z}$ einem bestimmten Grenzwert

$$J = {}^{\mathfrak{k}}\!\int F(z)\,|\,dz\,|$$

nähern.

§ 10. Berechnung bestimmter Integrale

Die Frage, wie nun der Zahlenwert von J in gegebenen Fällen wirklich zu berechnen ist, ist von etwas anderer Natur. Es ist dies im allgemeinen nur unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen möglich.

Wir wollen annehmen, daß die reellen Funktionen

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

die die Koordinaten des den Weg durchlaufenden Punktes liefern, wenn t das Intervall $\langle \alpha, \beta \rangle$ durchläuft, stetige Ableitungen $x'(t)$ und $y'(t)$ besitzen. Die Teilung des Weges, der dann sicher rektifizierbar ist, bewirken wir dadurch, daß wir das Parameter-Intervall gemäß

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = \beta$$

in n Teile zerlegen, die Zwischenwerte $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ wählen und nun mit $x(t) + iy(t) = z(t)$

$$z_\nu = z(t_\nu) \quad \text{für} \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots n$$

$$\zeta_\nu = z(\tau_\nu) \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, \ldots n$$

setzen. Zur Abkürzung setzen wir noch

$$u(x(t), y(t)) = \bar{u}(t),\ v(x(t), y(t)) = \bar{v}(t)$$

und können nun schreiben:

$$\sum_{\nu=1}^{n} (z_\nu - z_{\nu-1})\, f(\zeta_\nu)$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} [(x_\nu - x_{\nu-1}) + i(y_\nu - y_{\nu-1})]\, [\bar{u}(\tau_\nu) + i\bar{v}(\tau_\nu)].$$

Bei der nun schon oft besprochenen Verfeinerung der Einteilung streben die 4 reellen S-Summen, in die der letzte Ausdruck nach Ausmultiplizieren der eckigen Klammern sofort zerfällt, leicht zu erkennenden Grenzwerten zu. So strebt z. B.

$$\sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu - x_{\nu-1})\, \bar{u}(\tau_\nu) \text{ gegen } \int_\alpha^\beta \bar{u}(t)\, x'(t)\, dt.$$

Denn es ist nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$x_\nu - x_{\nu-1} = x(t_\nu) - x(t_{\nu-1}) = (t_\nu - t_{\nu-1})\, x'(\tau_\nu'),$$

wo auch τ_ν' einen Zwischenwert zwischen $t_{\nu-1}$ und t_ν bedeutet. Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von $x'(t)$ in $\langle \alpha, \beta \rangle$ kann nun

$$x'(\tau_\nu') = x'(\tau_\nu) + \varepsilon_\nu$$

gesetzt werden, wo mit der Verfeinerung der Einteilung alle ε_ν gleichmäßig unter jede Größe herabsinken[1]).

Daher ist die in Rede stehende reelle S-Summe

$$= \sum_{\nu=1}^{n} (t_\nu - t_{\nu-1})\, x'(\tau_\nu) \cdot \bar{u}(\tau_\nu) + \sum_{\nu=1}^{n} (t_\nu - t_{\nu-1})\, \varepsilon_\nu \cdot \bar{u}(\tau_\nu).$$

Und hierin ist der erste Teil genau diejenige S-Summe, die gegen das reelle Integral $\int_\alpha^\beta u(t)\, x'(t)\, dt$ strebt; der zweite

[1]) D. h. bei gegebenem $\varepsilon > 0$ kann durch Verfeinerung der Einteilung erreicht werden, daß alle $\varepsilon_\nu < \varepsilon$ sind.

Teil aber rückt gegen 0, da er bei gegebenem $\varepsilon > 0$ durch Verfeinerung der Teilung absolut genommen

$$< \varepsilon(\beta - \alpha) \cdot \bar{u}_0$$

gemacht werden kann, wenn $\bar{u}_0$ eine obere Schranke von $|u(t)|$ längs $\mathfrak{k}$ bedeutet. — Das Analoge gilt für die drei anderen S-Summen.

Der Grenzwert J, gegen den unsere komplexen S-Summen streben, d. h. also unser bestimmtes Integral, hat hiernach den Wert

$$(1)\quad J = {}^{\mathfrak{k}}\!\int f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta u x'\,dt - \int_\alpha^\beta v y'\,dt + i\int_\alpha^\beta u y'\,dt + i\int_\alpha^\beta v x'\,dt,$$

wofür man in nun nicht mehr mißzuverstehender Zusammenfassung schreiben darf

$$(2)\qquad J = \int_\alpha^\beta (\bar{u} + i\bar{v})\,(x' + iy')\,dt$$

oder noch kürzer

$$(3)\qquad J = \int_\alpha^\beta f(z(t)) \cdot z'(t)\,dt$$

oder schließlich

$$(4)\qquad J = \int_\alpha^\beta f(z)\,dz = {}^{\mathfrak{k}}\!\int f(z)\,dz,$$

wo nun die auf t bezüglichen Grenzen daran erinnern sollen, daß z eine Funktion von t ist, während bei der letzten Symbolik nur an den Weg als das allein Wesentliche erinnert wird.

So hat uns diese Untersuchung über die Berechnung des Integralwertes zugleich einen vertieften Einblick in die Bedeutung des eigentümlichen Symbols des bestimmten Integrales verschafft.

1. Beispiel.

$$f(z) = \frac{1}{z}\ ;\ \mathfrak{k}\colon z(t) = \cos t + i \sin t,\ -\pi \leqq t \leqq \pi.$$

Der Weg ist der von -1 im mathematisch positiven Sinne (Gegensinn des Uhrzeigers) bis zurück nach -1 durchlaufene Einheitskreis. Nach (3) ist also

$$J = \int_{\mathfrak{k}} \frac{dz}{z} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\cos t + i \sin t} (-\sin t + i \cos t)\, dt = i \int_{-\pi}^{\pi} dt = 2\pi i,$$

— ein Ergebnis, das in der Folge unausgesetzt gebraucht werden wird.

2. Beispiel.

$$f(z) = \Re(z) = x;\ z_0 = 0,\ Z = 1 + i.$$

Es soll $\int_{z_0}^{Z} f(z)\, dz$ längs zweier verschiedener Wege berechnet werden:

1. Weg $\mathfrak{k}_1$: Die gerade Verbindungsstrecke

$$z = (1 + i)\, t, \quad 0 \leqq t \leqq 1.$$

Man hat

$$J_1 = \int_0^1 t \cdot (1 + i)\, dt = (1 + i) \int_0^1 t\, dt = \tfrac{1}{2}(1 + i).$$

2. Weg $\mathfrak{k}_2$: Von 0 geradlinig nach 1 von dort geradlinig nach $1 + i$. Man findet, indem man beide Teile einzeln berechnet und addiert (vgl. § 11, Satz 1)

$$J_2 = \tfrac{1}{2} + i.$$

Man erhält also verschiedene Werte bei Benutzung verschiedener Wege. (Vgl. hierzu § 6, Aufgabe 2.)

Die folgenden Beispiele zeigen, daß es manchmal das einfachste ist, unmittelbar auf die Summendefinition des Integrals (§ 8 und 9) zurückzugehen.

3. Beispiel. $\mathfrak{G}$ sei die ganze Ebene; $f(z) = 1$; Weg: beliebig von z_0 nach Z. Es wird

$$\begin{aligned} S_{\mathfrak{z}} &= \sum_{\nu=1}^{n} (z_\nu - z_{\nu-1}) \cdot 1 \\ &= (z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + \cdots + (Z - z_{n-1}) \\ &= Z - z_0. \end{aligned}$$

Also ist auch

$$\lim S_{\mathfrak{z}} = J = \int_{z_0}^{Z} dz = Z - z_0$$

auf beliebigem Wege. Ist $\mathfrak{k}$ insbesondere ein geschlossener Weg, den wir dann mit $\mathfrak{C}$ bezeichnen wollen, so ist wegen $Z = z_0$

$$\mathfrak{C}\int dz = 0.$$

4. Beispiel. $\mathfrak{G}$ sei die ganze Ebene; $f(z) = z$; Weg beliebig von z_0 nach Z. Es wird

$$S_\delta = \sum_{\nu=1}^{n} (z_\nu - z_{\nu-1})\,\zeta_\nu,$$

wobei ζ_ν ein beliebiger Punkt des Kurvenstückes von $z_{\nu-1}$ bis z_ν sein durfte. Man wähle

a) $$\zeta_\nu = z_{\nu-1}.$$

Bezeichnet man die Summe dann mit S'_δ, so ist

$$S'_\delta = (z_1 - z_0)\,z_0 + (z_2 - z_1)\,z_1 + \cdots + (Z - z_{n-1})\,z_{n-1}.$$

b) $$\zeta_\nu = z_\nu.$$

Bezeichnet man die Summe nun mit S''_δ, so ist

$$S''_\delta = (z_1 - z_0)\,z_1 + (z_2 - z_1)\,z_2 + \cdots + (Z - z_{n-1})\,Z.$$

Hieraus folgt durch Addition:

$$S'_\delta + S''_\delta = Z^2 - z_0^2,$$

also auch

$$\lim (S'_\delta + S''_\delta) = 2J = Z^2 - z_0^2,$$

d. h.

$$J = \int_{z_0}^{Z} z\,dz = \tfrac{1}{2}(Z^2 - z_0^2)$$

bei ganz beliebigem Wege. Ist $\mathfrak{k}$ ein geschlossener Weg $\mathfrak{C}$, so ist wieder

$$\mathfrak{C}\int z\,dz = 0.$$

5. Beispiel. $\int (z - z_0)^m dz$; Weg $\mathfrak{k}$: Kreis mit r im positiven Sinne um z_0. $\mathfrak{k}$ läßt sich darstellen durch

$$z = z_0 + r(\cos t + i \sin t), \quad -\pi \leqq t \leqq \pi,$$

so daß (vgl. Elem., § 11, (10))

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} [r(\cos t + i \sin t)]^m \cdot r(-\sin t + i \cos t)\,dt$$

$$= i r^{m+1} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(m+1)t + i \sin(m+1)t)\,dt.$$

Nun ist aber bekanntlich für jedes von 0 verschiedene ganzzahlige (positive oder negative) k

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kt\,dt = 0 \quad \text{und} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin kt\,dt = 0,$$

während für $k = 0$ die Integrale

$$= 2\pi \quad \text{bzw.} \quad = 0$$

sind. Also ist unser Integral

$$\mathfrak{k}\int (z - z_0)^m dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{für } m = -1 \text{ (vgl. Beispiel 1),} \\ 0 & \text{für jeden anderen ganzzahligen Wert von } m. \end{cases}$$

Aufgaben. 1. Man berechne das letzte Integral auch für den Fall, daß

a) $\mathfrak{k}$ ein Quadrat ist, dessen Mittelpunkt in z_0 liegt und dessen Seiten den Achsen parallel sind;

b) $\mathfrak{k}$ eine Ellipse ist, deren Mittelpunkt in z_0 liegt und deren Achsen denen der Koordinaten parallel sind.

2. Man berechne $\int_{-i}^{i} |z|\,dz$, indem man den Weg

a) geradlinig, b) längs der linken, c) längs der rechten Hälfte des Einheitskreises nimmt.

§ 11. Einfache Integralsätze

Die folgenden einfachen Sätze, bei denen der fehlende Integrand stets $f(z)\,dz$ lauten soll, gehen fast unmittelbar aus der Summendefinition des Integrals hervor:

Satz 1.

$$\mathfrak{k}\int_{z_0}^{Z} + \mathfrak{k}'\int_{Z}^{Z'} = \mathfrak{k}+\mathfrak{k}'\int_{z_0}^{Z'},$$

d. h. die Summe von Integralen längs aufeinanderfolgender Wegstücke ist gleich dem Integral längs des Gesamtweges. Bei dem rechten Integral bedeutet die Wegangabe $\mathfrak{k} + \mathfrak{k}'$, *daß von* z_0 *längs* $\mathfrak{k}$ *nach Z und weiter längs* $\mathfrak{k}'$ *nach Z' zu gehen ist.*

Ebenso ist

$$\mathfrak{k}\int_{z_0}^{Z} = \mathfrak{k}_1\int_{z_0}^{z'} + \mathfrak{k}_2\int_{z'}^{Z},$$

wenn z' zwischen z_0 und Z auf $\mathfrak{k}$ gewählt wird und $\mathfrak{k}$ dadurch in $\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{k}_2$ zerlegt wird.

Satz 2.

$$\int_{z_0}^{Z}{}^{\mathfrak{k}} = -\int_{Z}^{z_0}{}^{\mathfrak{k}},$$

d. h. wenn längs desselben Weges einmal in der einen, das andere Mal in der entgegengesetzten Richtung integriert wird, so sind die Resultate entgegengesetzt gleich. Bezeichnet man den Weg in der einen Orientierung mit $\mathfrak{k}$, in der andern mit $-\mathfrak{k}$, so kann man auch kürzer schreiben

$$-\int^{\mathfrak{k}} = -\int^{\mathfrak{k}} \quad \text{oder} \quad \int^{\mathfrak{k}} + \int^{-\mathfrak{k}} = \int^{\mathfrak{k}+(-\mathfrak{k})} = 0,$$

was man kurz so ausdrücken kann: Wenn über dasselbe Wegstück **hin- und herintegriert** *wird, so ist der Integralwert gleich* 0.

Satz 3.

$$\int^{\mathfrak{k}} c f(z)\,dz = c \cdot \int^{\mathfrak{k}} f(z)\,dz,$$

d. h. ein konstanter Faktor des Integranden darf vor das Integralzeichen gesetzt werden.

Satz 4.

$$\int^{\mathfrak{k}} (f_1(z) + f_2(z))\,dz = \int^{\mathfrak{k}} f_1(z)\,dz + \int^{\mathfrak{k}} f_2(z)\,dz.$$

In Worten: Das Integral einer Summe zweier (oder mehrerer, aber endlich vieler) Funktionen ist gleich der Summe der Integrale über die einzelnen Summanden. Kurz: Eine Summe (endlich vieler Funktionen) darf gliedweise integriert werden.

Für die im folgenden sehr häufig auftretenden Abschätzungen ist schließlich der folgende Satz besonders wichtig:

Satz 5. *Es ist*

$$\left| \int^{\mathfrak{k}} f(z)\,dz \right| \leqq Ml,$$

wenn M eine obere Schranke der Werte von $|f(z)|$ längs $\mathfrak{k}$ bedeutet und wenn $\mathfrak{k}$ die Länge l hat.

Auch der Beweis dieser Formel ergibt sich unmittelbar aus der Definition des Integrals: Es war

$$S_\mathfrak{z} = \sum_{\nu=1}^{n} (z_\nu - z_{\nu-1})\, f(\zeta_\nu),$$

also ist

$$|S_\mathfrak{z}| \leqq \sum_{\nu=1}^{n} |z_\nu - z_{\nu-1}|\, |f(\zeta_\nu)| \leqq M \sum_{\nu=1}^{n} |z_\nu - z_{\nu-1}|.$$

Die jetzt rechts stehende Summe ist ihrer Bedeutung nach die Länge des in die Kurve $\mathfrak{k}$ eingezeichneten Sehnenpolygons mit den Ecken $z_0, z_1, z_2, \ldots, Z$; sie ist also $\leqq l$ für jedes n. Es ist somit

$$|S_\mathfrak{z}| \leqq Ml$$

für jedes $S_\mathfrak{z}$ und also auch

$$|J| \leqq Ml, \text{ w. z. b. w.}$$

So folgt z. B. ohne jede Rechnung für das erste Beispiel des § 10:

$$\left| \int_{\mathfrak{k}} \frac{dz}{z} \right| \leqq 1 \cdot 2\pi = 2\pi,$$

da für jeden Punkt z des Einheitskreises $\mathfrak{k}$ stets $|z| = 1$ und da dessen Länge $= 2\pi$ ist.

Aufgabe. Im Anschluß an die Aufgabe des § 9 zeige man, daß stets

$$\left| \int_{\mathfrak{k}} f(z)\, dz \right| \leqq \int_{\mathfrak{k}} |f(z)|\, |dz|$$

ist.

4. Kapitel. Der Cauchysche Integralsatz

§ 12. Formulierung des Integralsatzes

Nach der Definition des Integrales einer Funktion komplexen Argumentes hängt sein Wert nicht nur (wie der des reellen Integrales) von den Integrationsgrenzen z_0 und Z ab, sondern sehr wesentlich noch von dem Wege $\mathfrak{k}$, der sie verbindet (vgl.

§ 10, Beispiel 2). Es gilt nun — unter sogleich zu nennenden Voraussetzungen — der für die ganze Funktionentheorie grundlegende Satz, daß eine solche Abhängigkeit vom Wege nicht besteht, wenn die Funktion nicht nur, wie bisher angenommen, stetig, sondern auch differenzierbar ist, d. h. es gilt der folgende nach seinem Entdecker als **Cauchyscher Integralsatz** bezeichnete

Hauptsatz der Funktionentheorie

Erste Form: *Es sei die Funktion $w = f(z)$ in einem einfach-zusammenhängenden Gebiete $\mathfrak{G}$ regulär, und es seien z_0 und Z zwei (innere) Punkte von $\mathfrak{G}$. Dann hat das Integral*

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz$$

längs jedes von z_0 nach Z führenden und ganz in $\mathfrak{G}$ verlaufenden Integrationsweges denselben Wert.

Aus dieser ersten Form des Satzes folgt sofort eine zweite: Ein geschlossener Weg $\mathfrak{C}$ wird durch zwei seiner Punkte, z_0 und Z, in zwei Wegstücke $\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{k}_2$ zerlegt, die von z_0 nach Z führen, einmal im Sinne der Orientierung von $\mathfrak{C}$, das andere Mal im entgegengesetzten Sinne. Wegen $\mathfrak{k}_1 + (-\mathfrak{k}_2) = \mathfrak{C}$ und nach der ersten Form des Satzes ist nun nach § 11, Satz 1 und 2

$$^{\mathfrak{k}_1}\!\int = {}^{\mathfrak{k}_2}\!\int \quad \text{oder} \quad {}^{\mathfrak{k}_1}\!\int + {}^{-\mathfrak{k}_2}\!\int = {}^{\mathfrak{C}}\!\int = 0.$$

Aus der ersten Form ergibt sich also die folgende

Zweite Form: *Ist $f(z)$ in dem einfach-zusammenhängenden Gebiete $\mathfrak{G}$ regulär, so ist*

$$^{\mathfrak{C}}\!\int f(z)\,dz = 0,$$

wenn $\mathfrak{C}$ einen beliebigen (nicht notwendig doppelpunktfreien), geschlossenen, in $\mathfrak{G}$ liegenden Weg bedeutet.

Geht man umgekehrt von der zweiten Fassung aus, so folgt aus ihr sofort die erste; denn sind $\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{k}_2$ zwei beliebige

von z_0 nach Z führende Wege, so bilden, wenn man $-\mathfrak{f}_2$ an $\mathfrak{f}_1$ anhängt, diese zusammen einen geschlossenen (wenn auch nicht immer doppelpunktfreien) Weg, so daß dann

$$0 = {}^{\mathfrak{f}_1}\!\int - {}^{\mathfrak{f}_2}\!\int, \quad \text{d. h.} \quad {}^{\mathfrak{f}_2}\!\int = {}^{\mathfrak{f}_1}\!\int$$

ist.

Es genügt daher, den Hauptsatz in der zweiten Form zu beweisen, was im folgenden Paragraphen geschehen soll, und zwar in 3 Stufen: zunächst für den Fall, daß $\mathfrak{C}$ ein Dreieck; dann, daß $\mathfrak{C}$ ein beliebiges Polygon; endlich, daß $\mathfrak{C}$ ein beliebiger geschlossener Weg ist.

Durch die Beispiele 3 und 4 des § 10 haben wir den Cauchyschen Satz schon für zwei spezielle Funktionen, nämlich $f(z) = 1$ und $f(z) = z$, bewiesen, indem dort gezeigt wurde, daß für einen beliebigen geschlossenen Weg $\mathfrak{C}$

$$^{\mathfrak{C}}\!\int dz = 0 \quad \text{und} \quad ^{\mathfrak{C}}\!\int z\, dz = 0$$

ist.

§ 13. Beweis des Hauptsatzes

I. Teil: $\mathfrak{C}$ ist ein in $\mathfrak{G}$ liegendes Dreieck $\mathfrak{D}$.

Man zerlege $\mathfrak{D}$ durch Parallelen zu den Seiten in vier kongruente Teildreiecke $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$, $\mathfrak{D}'''$, $\mathfrak{D}^{(4)}$. Dann ist, wenn die Integrationswege stets im mathematisch positiven Sinne durchlaufen werden:

$$^{\mathfrak{D}}\!\int = {}^{\mathfrak{D}'}\!\int + {}^{\mathfrak{D}''}\!\int + {}^{\mathfrak{D}'''}\!\int + {}^{\mathfrak{D}^{(4)}}\!\int;$$

denn indem über den Rand der 4 Teildreiecke integriert wird (vgl. Fig. 1, in der die die Orientierung angebenden Pfeile innerhalb jedes der Teildreiecke eingezeichnet sind), wird über die 3 Hilfslinien hin- und herintegriert (vgl. § 11, 2), so daß sich deren Einfluß von selbst eliminiert. Unter den 4 Integralen rechter Hand muß nun eines sein — sein Weg

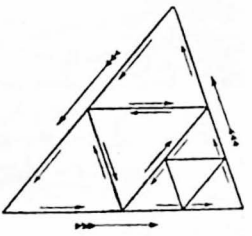

Fig. 1

werde mit $\mathfrak{D}_1$ bezeichnet —, für das

$$|\,^{\mathfrak{D}}\!\int| \leqq 4\,|\,^{\mathfrak{D}_1}\!\int|$$

ist, denn es kann nicht der Betrag jedes der Integrale kleiner als ein Viertel des Ganzen sein. Auf das Teildreieck $\mathfrak{D}_1$ kann man nun genau dieselbe Überlegung anwenden: es wird seinerseits wenigstens ein Teildreieck $\mathfrak{D}_2$ besitzen, für das

$$|\,^{\mathfrak{D}_1}\!\int| \leqq 4\,|\,^{\mathfrak{D}_2}\!\int|,$$

also

$$|\,^{\mathfrak{D}}\!\int| \leqq 4^2\,|\,^{\mathfrak{D}_2}\!\int|$$

ist. Fährt man weiter fort, so ergibt sich eine Folge von Dreiecken $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_n, \ldots$, die alle untereinander ähnlich sind, deren jedes ganz im vorhergehenden liegt, von diesem ein Viertel ist, und so, daß für $n = 1, 2, \ldots$

$$|\,^{\mathfrak{D}}\!\int| \leqq 4^n\,|\,^{\mathfrak{D}_n}\!\int| \quad \text{ist.}$$

Nach dem Einschachtelungssatz gibt es einen und nur einen Punkt z_0, der allen $\mathfrak{D}_n$ gemeinsam ist und also auch in $\mathfrak{G}$ liegt.

Es sei nun ε eine beliebig kleine positive Größe. Da $f(z)$ in z_0 eine Ableitung besitzt, läßt sich (s. § 6, II, 1. Form) $\delta > 0$ so bestimmen, daß für alle z mit $0 < |\,z - z_0\,| < \delta$

$$|\,f(z) - f(z_0) - (z - z_0)\,f'(z_0)\,| < \varepsilon\,|\,z - z_0\,|$$

oder

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\,f'(z_0) + \eta \cdot (z - z_0)$$

mit

$$|\,\eta\,| = |\,\eta(z)\,| < \varepsilon$$

ist. Man wähle nun n so groß, daß $\mathfrak{D}_n$ ganz in der durch $|\,z - z_0\,| < \delta$ charakterisierten Umgebung von z_0 liegt, daß also für alle z in $\mathfrak{D}_n$ und auf seinem Rande $|\,z - z_0\,| < \delta$ ist. Dann ist

$$^{\mathfrak{D}_n}\!\int f(z)\,dz = {}^{\mathfrak{D}_n}\!\int f(z_0)\,dz - {}^{\mathfrak{D}_n}\!\int z_0 f'(z_0)\,dz + {}^{\mathfrak{D}_n}\!\int z f'(z_0)\,dz + \\ + {}^{\mathfrak{D}_n}\!\int \eta \cdot (z - z_0)\,dz.$$

Nach § 11, Satz 3 und der Bemerkung am Ende des vorigen Paragraphen ist also

$$\mathfrak{D}_n\int f(z)\,dz = 0 + 0 + 0 + \mathfrak{D}_n\int \eta\cdot(z-z_0)\,dz$$

und folglich nach § 11, Satz 5

$$\left|\mathfrak{D}_n\int f(z)\,dz\right| < \varepsilon\cdot\frac{s_n}{2}\cdot s_n = \frac{\varepsilon}{2}\cdot s_n^2,$$

wenn s_n den Umfang von $\mathfrak{D}_n$ bezeichnet; denn $|z-z_0|$ ist als Abstand zweier Punkte ein und desselben Dreiecks $\mathfrak{D}_n$ höchstens $= s_n/2$, und die Länge des Weges ist $= s_n$, während $|\eta| < \varepsilon$ ist.

Da nun, wenn s den Umfang des gegebenen Dreiecks $\mathfrak{D}$ bezeichnet,

$$s_1 = \frac{s}{2},\quad s_2 = \frac{s_1}{2} = \frac{s}{2^2},\ \ldots,\ s_n = \frac{s}{2^n}$$

ist, so hat man schließlich

$$\left|\mathfrak{D}\int f(z)\,dz\right| \leqq 4^n\left|\mathfrak{D}_n\int f(z)\,dz\right| \leqq 4^n\cdot\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{s^2}{4^n} = \frac{\varepsilon}{2}\cdot s^2.$$

Hier steht aber rechts eine Zahl, die durch Wahl von ε beliebig klein gemacht werden kann, links dagegen der Betrag eines bestimmten Integralwertes; dieser muß also notwendig $= 0$ sein, w. z. b. w.

II. Teil: Der Weg $\mathfrak{C}$ ist ein beliebiges geschlossenes in $\mathfrak{G}$ liegendes Polygon $\mathfrak{p}$, das sich auch selbst überschneiden darf.

Ist $\mathfrak{C}$ zunächst ein sich selbst nicht überschneidendes Viereck $\mathfrak{V}$, so läßt es sich stets durch eine in seinem Innern verlaufende Diagonale in zwei ebenfalls in $\mathfrak{G}$ liegende Dreiecke $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}'$ zerlegen, und es ist wieder (s. Fig. 2):

$$\mathfrak{V}\int = \mathfrak{D}\int + \mathfrak{D}'\int = 0.$$

Fig. 2

Ebenso läßt sich nach § 4, Hilfssatz 2 jedes beliebige, sich selbst nicht überschneidende, ge-

schlossene Polygon $\mathfrak{p}$ durch Diagonalen, die sich nicht schneiden und ganz in seinem Innern verlaufen, in Dreiecke zerlegen. Integriert man über alle diese Dreiecke einzeln, so ist jedes dieser Integrale $= 0$. Addiert man sie alle, so ist die Summe, weil über jede Diagonale hin- und herintegriert wird, gleich dem über den Rand des Polygons $\mathfrak{p}$ genommenen Integral. Also ist auch

$$^{\mathfrak{p}}\int f(z)\,dz = 0.$$

Ein geschlossenes Polygon $\mathfrak{p}$ endlich, das sich selbst überschneidet, läßt sich nach § 4, Hilfssatz 1 aus endlich vielen geschlossenen Polygonen zusammensetzen, von denen jedes einzelne doppelpunktfrei ist und ganz im positiven oder ganz im negativen Sinne umlaufen ist und zu denen noch endlich viele hin und her durchlaufene Strecken hinzukommen können. Integriert man über jeden Teil einzeln und addiert, so sieht man, daß auch jetzt

$$^{\mathfrak{p}}\int f(z)\,dz = 0 \text{ ist.}$$

III. Teil: $\mathfrak{C}$ ist ein beliebiger geschlossener in $\mathfrak{G}$ gelegener Weg.

Wie klein auch $\varepsilon > 0$ gegeben wird, wir werden ein geeignetes Polygon $\mathfrak{p}$ angeben können, so daß

$$|\,^{\mathfrak{C}}\int - \,^{\mathfrak{p}}\int\,| < \varepsilon$$

ist. Dann ist aber nach II

$$|\,^{\mathfrak{C}}\int\,| < \varepsilon, \text{ d. h. } {}^{\mathfrak{C}}\int = 0.$$

Nach Definition ist nämlich

$$^{\mathfrak{C}}\int = \lim S_{\mathfrak{z}} = \lim \sum_{\nu=1}^{n} (z_\nu - z_{\nu-1})\, f(\zeta_\nu), \quad (\text{mit } z_0 = z_n).$$

Man wähle nun, nachdem ein beliebiges $\varepsilon > 0$ gegeben ist, die Teilpunkte z_ν so dicht beieinander und also n so groß, daß

1) $|{}^{\mathfrak{C}}\int - S_\delta| < \varepsilon/2$ bleibt, was nach dem Satz des § 9 stets möglich ist;

2) die Längen aller Wegstückchen $< \frac{1}{2}\varrho$ sind, wenn ϱ die nach dem Hilfssatz 3 des § 4 durch $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{G}$ bestimmte Zahl bedeutet;

3) diese Längen auch $< \delta$ sind, wenn δ die nach dem Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit bestimmbare Zahl bedeutet, für die

$$|f(z'') - f(z')| < \varepsilon/(2l) \quad (l = \text{Länge von } \mathfrak{C})$$

ausfällt, wofern z' und z'' irgend zwei auf $\mathfrak{C}$ oder von $\mathfrak{C}$ um höchstens $\frac{1}{2}\varrho$ entfernt gelegene Punkte sind, für die $|z'' - z'| < \delta$ ist, so daß insbesondere, wenn z einen Punkt der Sehne $z_{\nu-1} \ldots z_\nu$ bedeutet,

$$f(z) = f(\zeta_\nu) + \eta_\nu \text{ mit } |\eta_\nu| < \varepsilon/(2l)$$

gesetzt werden kann.

Zieht man nun die Sehnen von z_0 nach z_1, von z_1 nach $z_2, \ldots$, von z_{n-1} nach $z_n = z_0$, so entsteht ein Polygon $\mathfrak{p}$, das nach 2) noch ganz in $\mathfrak{G}$ liegt, und es ist, wenn man über jede Seite von $\mathfrak{p}$ einzeln (also auf geradlinigem Wege) integriert,

$$\begin{aligned} {}^{\mathfrak{p}}\int &= \sum_{\nu=1}^{n} \int_{z_{\nu-1}}^{z_\nu} f(z)\,dz = \sum_{\nu=1}^{n} \int_{z_{\nu-1}}^{z_\nu} (f(\zeta_\nu) + \eta_\nu)\,dz \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} f(\zeta_\nu) \int_{z_{\nu-1}}^{z_\nu} dz + \sum_{\nu=1}^{n} \int_{z_{\nu-1}}^{z_\nu} \eta_\nu dz = S_\delta + \sum_{\nu=1}^{n} \int_{z_{\nu-1}}^{z_\nu} \eta_\nu dz, \end{aligned}$$

also

$$\left| {}^{\mathfrak{p}}\int - S_\delta \right| \leqq \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2l} |z_\nu - z_{\nu-1}| \leqq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Folglich

$$\begin{aligned} &|{}^{\mathfrak{C}}\int - {}^{\mathfrak{p}}\int| = |({}^{\mathfrak{C}}\int - S_\delta) - ({}^{\mathfrak{p}}\int - S_\delta)| \\ &\leqq |{}^{\mathfrak{C}}\int - S_\delta| + |{}^{\mathfrak{p}}\int - S_\delta| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon, \end{aligned}$$

und nach der Vorbemerkung ist daher

$$\mathfrak{C}\int f(z)\,dz = 0, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Dieser dritte Teil des Beweises besagt kurz dies: Weil das Integral über ein beliebiges Polygon stets 0 ist und weil ein beliebiger Weg $\mathfrak{C}$ beliebig genau durch ein Sehnenpolygon approximiert werden kann, so kann das längs $\mathfrak{C}$ genommene Integral nicht von 0 verschieden sein.

§ 14. Einfache Folgerungen und Erweiterungen

Der Cauchysche Integralsatz bildet den Ausgangspunkt für fast alle tiefer gehenden Untersuchungen über analytische Funktionen. Alle nachfolgenden Kapitel, insbesondere schon das nächste, werden dies lehren. Hier sollen zunächst einige einfache Folgerungen und Erweiterungen angeführt werden.

1. Ist $\mathfrak{G}$ ein beliebiges Gebiet und $f(z)$ in ihm regulär, so wird auch jetzt noch für einen geschlossenen Weg $\mathfrak{C}$

$$\mathfrak{C}\int f(z)\,dz = 0 \tag{1}$$

sein, falls sich $\mathfrak{C}$ in ein einfach zusammenhängendes Teilgebiet $\mathfrak{G}'$ von $\mathfrak{G}$ einbetten läßt, d. h. wenn sich ein einfach zusammenhängendes Teilgebiet $\mathfrak{G}'$ von $\mathfrak{G}$ so angeben läßt, daß $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{G}'$ liegt.

2. Da $\mathfrak{C}$ im Sinne von § 4, 3 ein Kontinuum ist, ist die in 1. genannte Möglichkeit immer dann gegeben, wenn die Komplementärmenge von $\mathfrak{G}$, die eine abgeschlossene Menge $\mathfrak{A}$ bildet und nicht leer vorausgesetzt werden darf, ganz in dem Außengebiet liegt, das durch das Kontinuum $\mathfrak{C}$ in der Ebene bestimmt wird. Zum Beweise braucht man nur den Hilfssatz 4 des § 4 heranzuziehen und im Sinne dieses Satzes ε hinreichend klein zu wählen. Das Innengebiet von $\mathfrak{p}$ liefert dann das in 1. benötigte einfach zusammenhängende Teilgebiet $\mathfrak{G}'$ von $\mathfrak{G}$.

Insbesondere gilt also die Gleichung (1) immer dann, wenn $\mathfrak{C}$ ein doppelpunktfreier in $\mathfrak{G}$ liegender geschlossener Weg ist, dessen Innengebiet ganz zu $\mathfrak{G}$ gehört.

3. Etwas tiefer liegt schon die Tatsache, daß die Gleichung (1) für einen geschlossenen doppelpunktfreien Weg $\mathfrak{C}$ schon dann richtig ist, wenn man nur weiß, daß $f(z)$ im Innengebiet von $\mathfrak{C}$ und in jedem Punkte des Weges selbst regulär ist. Den Beweis hierfür findet man bei E. Kamke, Math. Zeitschr. 35 (1932), S. 539.

Selbst wenn man nur weiß, daß $f(z)$ im Innengebiet von $\mathfrak{C}$ regulär ist und in jedem Punkte z von $\mathfrak{C}$ einen Randwert $f(z)$ annimmt (s. § 6), so gilt mit diesen Randwerten — die dann von selbst eine längs $\mathfrak{C}$ stetige Funktion bilden (s. § 6, Aufgabe 3) — wiederum die Gleichung (1). Einen Beweis für diese durchaus nicht selbstverständliche Erweiterung des Cauchyschen Integralsatzes gab zuerst S. Pollard; vgl. auch Math. Zeitschr. **37** (1933), S. 38 und 556 sowie das S. 5 genannte Lehrbuch von Behnke-Sommer, S. 111.

4. Es seien jetzt $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ zwei geschlossene doppelpunktfreie Wege, von denen $\mathfrak{C}_2$ ganz im Innengebiet von $\mathfrak{C}_1$ liegt. Dann bilden diejenigen Punkte der Ebene, die im Innengebiet von $\mathfrak{C}_1$ und zugleich im Außengebiet von $\mathfrak{C}_2$ liegen, wiederum ein Gebiet, das man kurz das durch $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ bestimmte Ringgebiet nennt. Liegen nun beide Wege in einem (beliebigen) Gebiet $\mathfrak{G}$, in dem $f(z)$ regulär ist, so gilt der

Satz 1. *Es ist*

$$\int_{\mathfrak{C}_1} f(z)\,dz = \int_{\mathfrak{C}_2} f(z)\,dz,$$

falls das durch $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ bestimmte Ringgebiet ganz zu $\mathfrak{G}$ gehört und falls beide Wege in demselben Sinne orientiert sind —, mag das Innere von $\mathfrak{C}_2$ ganz zu $\mathfrak{G}$ gehören oder auch nicht.

Beweis. Man verbinde (s. Fig. 3) die Wege $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ durch zwei ganz im Ringgebiet verlaufende, einander nicht treffende Hilfswege $\mathfrak{s}'$ und $\mathfrak{s}''$[1]). Durch sie wird das Ring-

[1]) Daß man solche Hilfswege stets ziehen kann, sieht man leicht ein: Man braucht nur von einem im Innengebiet von $\mathfrak{C}_1$ liegenden Punkt z_0 zwei Halbstrahlen zu ziehen und auf jedem die Strecke von dem ersten Punkt desselben, der auf $\mathfrak{C}_1$ liegt, zurück bis zu dem ersten wieder auf $\mathfrak{C}_1$ gelegenen Punkt als Hilfsweg zu nehmen.

gebiet in zwei einfach-zusammenhängende Teilgebiete zerlegt, die in $\mathfrak{G}$ liegen und deren doppelpunktfreie Randkurven ebenfalls in $\mathfrak{G}$ liegen. Nach 2. sind die Integrale über diese Ränder $= 0$, also auch ihre Summe. Bei der Addition heben sich aber nach § 11, 2 die Integrale längs der Hilfswege fort, und man erhält, wenn $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ beide im mathematisch positiven Sinne orientiert sind,

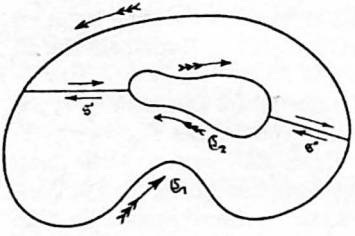

Fig. 3

$$\mathfrak{C}_1\int + {}^{-}\mathfrak{C}_1\int = 0, \quad \text{d. h.} \quad \mathfrak{C}_1\int = \mathfrak{C}_1\int,$$

w. z. b. w.

Beispiel. Nach § 10, Beispiel 5, ist

$$\mathfrak{C}\int \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i,$$

wenn $\mathfrak{C}$ ein Kreis um z_0 ist. Nach dem eben bewiesenen Satze hat das Integral genau denselben Wert, wenn $\mathfrak{C}$ irgendein geschlossener doppelpunktfreier und positiv orientierter Weg ist, für den z_0 im Innengebiet liegt. Ein jeder dieser Wege erfüllt, als $\mathfrak{C}_1$ genommen, zusammen mit einem hinreichend kleinen Kreise um z_0 als $\mathfrak{C}_2$ die Voraussetzung des eben bewiesenen Satzes. — Analoges gilt für alle Integrale in § 10, Beispiel 5.

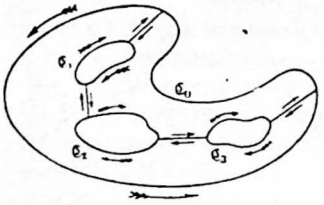

Fig. 4

5. Ganz ähnlich beweist man den

Satz 2. *Es sei $\mathfrak{C}_0$ ein geschlossener doppelpunktfreier Weg und $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_m$ seien ebensolche Wege, die ganz im Innengebiet von $\mathfrak{C}_0$ liegen und von denen jeder im Außengebiet des andern liegt (vgl. Fig. 4, bei der $m = 3$ genommen ist). Dann ist*

$$\mathfrak{C}_0 \int f(z)\,dz = \mathfrak{C}_1 \int f(z)\,dz + \mathfrak{C}_2 \int f(z)\,dz + \cdots + \mathfrak{C}_m \int f(z)\,dz,$$

falls alle genannten Wege und das Ringgebiet zwischen $\mathfrak{C}_0$ *und den* $\mathfrak{C}_\mu$, $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$, *ganz in einem Gebiete* $\mathfrak{G}$ *liegen, in dem* $f(z)$ *regulär ist, und falls alle Wege in demselben Sinne orientiert sind.*

Der ganz analog wie bei Satz 1 verlaufende Beweis ist in der Fig. 4 durch Pfeile angedeutet.

Beispiel. Durch Zerlegung des Integranden findet man, daß

$$\mathfrak{C} \int \frac{2z-1}{z^2-z}\,dz = \mathfrak{C}_1 \int \frac{dz}{z} + \mathfrak{C}_2 \int \frac{dz}{z-1} = 4\pi i$$

ist, wenn $\mathfrak{C}$ die Punkte 0 und 1, $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ dagegen nur 0 bzw. 1 umschließen.

6. Nun kann die Existenz von Stammfunktionen zu gegebenen regulären Funktionen bewiesen werden. Wir zeigen zunächst:

Satz 3. *Ist* $f(z)$ *eine in dem Gebiete* $\mathfrak{G}$ *(eindeutige und) stetige Funktion, ist* z_0 *ein beliebiger, aber weiterhin fester Punkt von* $\mathfrak{G}$ *und ist das Integral*[1])

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta \tag{1}$$

unabhängig vom Wege, wofern dieser nur ganz in $\mathfrak{G}$ *verläuft, so liefert sein Wert eine in* $\mathfrak{G}$ *reguläre Funktion* $F(z)$ *der oberen Grenze* z, *falls dieser Punkt und der Integrationsweg ganz in* $\mathfrak{G}$ *liegen. Für diese Funktion ist überdies* $F'(z) = f(z)$ *für jedes* z *in* $\mathfrak{G}$.

Beweis. Auf Grund der gemachten Voraussetzungen ist jedenfalls $F(z)$ in $\mathfrak{G}$ eindeutig durch das Integral bestimmt.

[1]) Bei einem bestimmten Integral darf natürlich die Integrationsveränderliche ganz beliebig bezeichnet werden. Hier, wie im folgenden oft, ist sie ζ genannt, während z einen an und für sich willkürlichen, aber während der Integration festgehaltenen Punkt bedeutet.

Des weiteren muß nun (s. § 6, II, 1. Form) bewiesen werden, daß bei gegebenem $\varepsilon > 0$

$$\left| \frac{F(z') - F(z)}{z' - z} - f(z) \right| < \varepsilon$$

ist, wenn nur $z' \neq z$ hinreichend dicht an z liegt. Da z ein innerer Punkt von $\mathfrak{G}$ ist, so liegt auch eine gewisse Umgebung von ihm noch ganz in $\mathfrak{G}$; auf diese denken wir uns den Punkt z' beschränkt. Dann ist nach § 11, Satz 1

$$F(z') - F(z) = \int_z^{z'} f(\zeta)\, d\zeta,$$

und hierin darf der Weg nach Voraussetzung beliebig, also etwa geradlinig angenommen werden[1]).

Alsdann kann aber

$$f(\zeta) = f(z) + \eta(\zeta)$$

gesetzt werden, wobei, da die Funktion ja stetig ist, für alle ζ auf der Strecke $z \ldots z'$

$$|\eta(\zeta)| < \varepsilon$$

ist, wofern nur die Umgebung des Punktes z, auf die wir z' beschränkt haben, klein genug genommen wird. Dann ist aber

$$F(z') - F(z) = (z' - z) f(z) + \int_z^{z'} \eta\, d\zeta,$$

woraus nach § 11, Satz 5

$$|F(z') - F(z) - (z' - z) f(z)| < \varepsilon |z' - z|$$

und also die Behauptung selbst folgt.

[1]) Denn aus den Voraussetzungen folgt sofort, daß das Integral über $f(z)$ zwischen irgend zwei Punkten aus $\mathfrak{G}$ unabhängig vom Wege ist, falls dieser nur ganz in $\mathfrak{G}$ liegt.

Zusatz. Die Voraussetzungen des Satzes 3 sind sicher dann erfüllt, wenn $\mathfrak{G}$ einfach zusammenhängend und $f(z)$ in $\mathfrak{G}$ regulär ist: *Jede in einem einfach zusammenhängenden Gebiete reguläre Funktion besitzt dort also eine Stammfunktion*, und eine solche läßt sich durch das in Satz 3 angegebene Integral (1) darstellen. — In § 16, Satz 4 wird übrigens gezeigt werden, daß die in Satz 3 verlangte Unabhängigkeit des Integrals (1) vom Wege nur dann eintritt, wenn $f(z)$ in $\mathfrak{G}$ regulär ist. Es sind also nur die regulären Funktionen, welche Stammfunktionen besitzen.

Beispiel. $\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$ ist nach diesem Satze eine reguläre Funktion in jedem einfach-zusammenhängenden Gebiete, das den Punkt 1, aber nicht den Punkt 0 enthält, also z. B. in der „rechten" Halbebene (vgl. § 2, f).

7. Aus diesem Satze folgt nun, dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung entsprechend, der

Satz 4. *Ist $f(z)$ in dem einfach zusammenhängenden Gebiete $\mathfrak{G}$ regulär und $F(z)$ eine Stammfunktion zu $f(z)$ in $\mathfrak{G}$, so ist stets*

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz = F(z_1) - F(z_0), \tag{2}$$

falls die Punkte z_0 und z_1 und der Integrationsweg in $\mathfrak{G}$ liegen.

Nach Satz 3, Zusatz und nach § 7, Satz 3 können sich das Integral (1) und die jetzige Stammfunktion $F(z)$ höchstens um eine additive Konstante unterscheiden:

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = F(z) + c.$$

Für $z = z_0$ ergibt sich, daß $c = -F(z_0)$ sein muß, und für $z = z_1$ erhält man dann die Gleichung (2).

5. Kapitel. Die Cauchyschen Integralformeln

§ 15. Die Hauptformel

Als wichtigste Folgerung aus dem Integralsatz beweisen wir nun die **Cauchysche Integralformel:**

Satz. *Ist $f(z)$ in dem (beliebigen) Gebiete $\mathfrak{G}$ regulär, so gilt für jeden in $\mathfrak{G}$ gelegenen geschlossenen doppelpunktfreien, positiv orientierten Weg $\mathfrak{C}$, dessen Innengebiet ganz zu $\mathfrak{G}$ gehört, und für jeden in diesem Innengebiet gelegenen Punkt z die Formel*[1])

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Dieser Satz besagt: Wenn man von einer Funktion nur weiß, daß sie in einem Gebiete $\mathfrak{G}$ regulär ist, und wenn man ihre Werte längs eines geschlossenen (einfachen) Weges $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{G}$ kennt, der keinen nicht zu $\mathfrak{G}$ gehörigen Punkt umschließt, so folgen daraus mit Notwendigkeit ihre Werte im Innern von $\mathfrak{C}$. Wie aus dieser Interpretation hervorgeht, ist der Satz außerordentlich merkwürdig und zeigt, daß die Werte einer regulären Funktion durch ein sehr starkes inneres Band miteinander verknüpft sind, derart, daß die Werte längs des Randes diejenigen im Innern von $\mathfrak{C}$ vollständig mitbestimmen. Etwas Ähnliches ist ersichtlich bei den in § 5 definierten allgemeinsten und darum willkürlichsten Funktionen nicht möglich. Spätere Sätze werden zeigen, daß die genannte Bindung noch viel weiter geht.

Beweis. Es ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} \frac{f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

[1]) Man beachte, daß hier ζ die Integratonsveränderliche ist und daß z als konstant anzusehen ist.

Nach § 11, Satz 3 und § 14, Satz 1 (Beispiel) ist der erste Summand $J_1 = f(z)$. In dem zweiten J_2 darf nun nach § 14, Satz 1 der Weg $\mathfrak{C}$ durch jeden anderen den Punkt z umschließenden Weg, z. B. durch einen kleinen Kreis $\mathfrak{k}$ mit dem Mittelpunkt z ersetzt werden, so daß

$$J_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{k}} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta$$

ist. Wählt man nun bei gegebenem $\varepsilon > 0$ den Radius ϱ von $\mathfrak{k}$ so klein, daß für jeden Punkt ζ von $\mathfrak{k}$

$$|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$$

ist, was wegen der Stetigkeit von $f(\zeta)$ sicher möglich ist, so ist nach § 11, 5

$$|J_2| \leqq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{\varrho} \cdot 2\pi\varrho = \varepsilon, \text{ d. h. } J_2 = 0.$$

Also ist, wie behauptet,

$$J_1 + J_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z).$$

§ 16. Integralformeln für die Ableitungen

Ist $\mathfrak{k}$ ein beliebiger Weg und $\varphi(z)$ eine längs desselben definierte und dort stetige Funktion, so hat das Integral

$$(1) \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{k}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

für jedes nicht auf $\mathfrak{k}$ gelegene z einen bestimmten Wert, definiert also in den nicht zu $\mathfrak{k}$ gehörigen Punkten eine eindeutige Funktion $f(z)$. Von dieser gilt sogar der

Satz 1. *Die durch* (1) *definierte Funktion* $f(z)$ *ist in jedem Gebiete* $\mathfrak{G}$, *das keinen Punkt von* $\mathfrak{k}$ *enthält, regulär, und für ihre Ableitung gilt dort die Formel*

$$(2) \qquad f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{k}} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta .$$

Beweis. Es muß (s. § 6, II, 3. Form) bei festgehaltenem z aus $\mathfrak{G}$

$$(3) \qquad \lim_{n \to \infty} \left\{ \frac{f(z_n) - f(z)}{z_n - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{k}} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right\} = 0$$

bewiesen werden, falls die $z_n \neq z$ sind, ebenfalls in $\mathfrak{G}$ liegen und gegen z streben. Nun ist aber nach (1)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{k}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \text{ und } f(z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{k}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_n} d\zeta .$$

Also ist

$$\frac{f(z_n) - f(z)}{z_n - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{k}} \frac{\varphi(\zeta)}{z_n - z} \left[\frac{1}{\zeta - z_n} - \frac{1}{\zeta - z} \right] d\zeta$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{k}} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_n)} d\zeta .$$

Bezeichnet man den in der geschweiften Klammer der Behauptung (3) stehenden Ausdruck mit A_n, so ist hiernach

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{k}} \varphi(\zeta) \left[\frac{1}{(\zeta - z)(\zeta - z_n)} - \frac{1}{(\zeta - z)^2} \right] d\zeta$$
$$= \frac{z_n - z}{2\pi i} \int_{\mathfrak{k}} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^2 (\zeta - z_n)} d\zeta .$$

Ist nun M eine obere Schranke der Werte $|\varphi(\zeta)|$ längs $\mathfrak{k}$, wird der Abstand des Punktes z von $\mathfrak{k}$ mit d bezeichnet und n so groß genommen, daß $|z - z_n| < \frac{1}{2} d$ ist, so ist für diese n nach § 11, Satz 5 ersichtlich

$$|A_n| < \frac{|z_n - z|}{2\pi} \cdot \frac{2M}{d^3} \cdot l .$$

Also strebt

$$A_n \to 0, \text{ w. z. b. w.}$$

Die Formel (2) besagt offenbar einfach, daß man, um die Ableitung von $f(z)$ zu bekommen, in der Definitionsformel (1) unter dem Integralzeichen nach z differenzieren darf.

Ganz ähnlich beweist man, daß dies noch ein zweites Mal und beliebig oft wiederholt werden darf:

Satz 2. *Die durch* (1) *definierte Funktion* $f(z)$ *besitzt in* $\mathfrak{G}$ *Ableitungen jeder Ordnung, und für diese gelten die Formeln*

$$f''(z) = \frac{2!}{2\pi i} \int_{\mathfrak{k}} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^3} d\zeta \tag{4}$$

und allgemein

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\mathfrak{k}} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \tag{5}$$

für $n = 1, 2, 3, \ldots$[1]).

Wir deuten noch den Beweis für (4) an: Es ist mit Benutzung von (2)

$$B_n = \frac{f'(z_n) - f'(z)}{z_n - z} - \frac{2!}{2\pi i} \int_{\mathfrak{k}} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^3} d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{k}} \varphi(\zeta) \left[\frac{1}{z_n - z} \left(\frac{1}{(\zeta - z_n)^2} - \frac{1}{(\zeta - z)^2} \right) - \frac{2}{(\zeta - z)^3} \right] d\zeta,$$

und (4) ist gleichbedeutend mit der Behauptung: $B_n \to 0$.

Nun ist aber die eckige Klammer im Integranden $= (z_n - z) \frac{3\zeta - z - 2z_n}{(\zeta - z)^3 (\zeta - z_n)^2}$ und also, wenn M_1 eine ähnliche Bedeutung hat wie soeben M,

$$|B_n| < \frac{|z_n - z|}{2\pi} \cdot \frac{4 M_1}{d^5} \cdot l, \quad \text{also} \quad B_n \to 0, \text{ w. z. b. w.}$$

Mit Hilfe dieses Ergebnisses sind wir nun imstande, eine wichtige Eigenschaft unserer regulären Funktionen zu erkennen. Eine (eindeutige) Funktion wurde von uns regulär genannt, lediglich wenn sie eine Ableitung besitzt. Bei Funktionen einer reellen Veränderlichen folgt hieraus bekanntlich nichts über die Natur dieser Ableitung: sie braucht ihrerseits

[1]) (5) enthält für $n = 0$ auch die Formel (1), wenn man wie üblich unter $0!$ den Wert 1 versteht.

nicht einmal stetig zu sein. Bei unseren regulären Funktionen einer komplexen Veränderlichen dagegen gilt der außerordentlich merkwürdige und grundlegende

Satz 3. *Besitzt eine in einem beliebigen Gebiet* $\mathfrak{G}$ *(eindeutig) gegebene Funktion* $f(z)$ *einer komplexen Veränderlichen dort eine erste Ableitung, so folgt daraus die Existenz aller höheren Ableitungen (und also auch deren Stetigkeit).*

Beweis. Ist z ein beliebiger Punkt in $\mathfrak{G}$, so sei $\mathfrak{C}$ eine positiv umlaufene und so kleine Kreislinie um z, daß sie und ihr Inneres ganz zu $\mathfrak{G}$ gehört. Nach Satz 1 ist dann

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

eine überall innerhalb $\mathfrak{C}$ reguläre und dort beliebig oft differenzierbare Funktion. Nach der Cauchyschen Integralformel des § 15 ist diese Funktion aber die Funktion $f(z)$ selbst, die also dort, insbesondere daher in z, gleichfalls Ableitungen jeder Ordnung besitzt.

Zusatz. *Neben der Hauptformel gelten also unter den gleichen Voraussetzungen wie dort die Formeln*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta$$

für $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Aus diesem grundlegenden Ergebnis folgt noch, daß der Cauchysche Integralsatz umkehrbar ist:

Satz 4. *Ist* $f(z)$ *in dem (beliebigen) Gebiete* $\mathfrak{G}$ *(eindeutig und) stetig und ist für jeden dort liegenden geschlossenen Weg* $\mathfrak{C}$

$$\int_{\mathfrak{C}} f(z)\,dz = 0,$$

so ist $f(z)$ *in* $\mathfrak{G}$ *regulär.* **(Satz von Morera.)**

Beweis. Wie beim Schluß von der zweiten auf die erste Form des Hauptsatzes (§ 12) ergibt sich hier, daß

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$$

vom Wege unabhängig ist und also (vgl. § 14, Satz 3) eine in $\mathfrak{G}$ reguläre Funktion $F(z)$ darstellt, für die $F'(z) = f(z)$ ist. Nach den vorangehenden Ergebnissen besitzt aber $F(z)$ als reguläre Funktion eine zweite, d. h. $f(z)$ eine erste Ableitung in $\mathfrak{G}$. $f(z)$ ist also in $\mathfrak{G}$ regulär.

Aufgabe. Man führe den Beweis der Formeln (5) für $n = 3$ und allgemein (durch Induktion) für beliebiges n vollständig durch.

Dritter Abschnitt

Reihen und Reihenentwicklungen analytischer Funktionen

6. Kapitel. Reihen mit veränderlichen Gliedern

Wie schon in § 3 hervorgehoben, nehmen wir an, daß der Leser mit der Lehre von den unendlichen Reihen mit konstanten komplexen Gliedern vertraut ist (s. Elem., 7. u. 8. Kap.). Wir wenden uns daher sogleich zu einer etwas allgemeiner gehaltenen Untersuchung über Reihen mit veränderlichen Gliedern.

§ 17. Konvergenzbereich

Es sei

$$f_0(z), f_1(z), \ldots, f_n(z), \ldots$$

eine unendliche Folge beliebiger Funktionen (§ 5). Es möge gewisse Punkte z geben, die zum Definitionsbereiche aller dieser Funktionen gehören. Ist z ein bestimmter dieser Punkte, so kann die Reihe

$$f_0(z) + f_1(z) + f_2(z) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$$

konvergent sein oder nicht. Die Menge aller derjenigen Punkte z, für die alle Summanden definiert sind und für die die Reihe konvergiert, werde mit $\mathfrak{M}$ bezeichnet. $\mathfrak{M}$ heißt der Konvergenzbereich der vorgelegten Reihe.

Die gewöhnlichen Potenzreihen entsprechen den speziellen Annahmen

$$f_n(z) = a_n z^n \text{ oder } = a_n(z - z_0)^n.$$

Die erste wichtige Eigenschaft solcher Potenzreihen ist, daß für sie der Konvergenzbereich $\mathfrak{M}$ das Innere eines gewissen Kreises um den Punkt z_0 — des sog. Konvergenzkreises — ist, evtl. mit Einschluß gewisser Punkte seiner Peripherie.

Wir wollen diese Tatsache auf einem Wege beweisen, der uns gleichzeitig den Radius r dieses Konvergenzkreises liefern wird.

Man betrachte die Folge der (nicht negativen) reellen Zahlen

$$(1) \qquad |a_0|, |a_1|, \sqrt{|a_2|}, \ldots, \sqrt[n]{|a_n|}, \ldots.$$

Sie liefert uns sofort die gewünschten Ergebnisse, denn es gilt der folgende

Satz. *Ist die Folge* (1) *nach rechts beschränkt und* μ *ihr oberer Limes* (*s. § 3*), *so ist*

a) $$r = 1/\mu, \quad \text{wenn } \mu > 0,$$

b) $$r = +\infty, \text{ wenn } \mu = 0 \text{ ist.}$$

Ist aber die Folge (1) *nach rechts nicht beschränkt, so ist* $r = 0$. *Es ist also*

c) $$r = 0, \text{ wenn } \mu = +\infty \text{ ist.}$$

Bei sinngemäßer Deutung ist also stets

$$r = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Für $|z - z_0| < r$ *ist die Reihe* $\sum a_n (z - z_0)^n$ *absolut konvergent, für* $|z - z_0| > r$ *ist sie divergent.* **(Cauchy-Hadamardscher Satz.)**

Beweis. Schreibt man z statt $z - z_0$, so sieht man, daß es genügt, $z_0 = 0$ anzunehmen.

1) Ist nun $0 \leqq \mu < +\infty$, so ist offenbar

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = \overline{\lim} |z| \cdot \sqrt[n]{|a_n|} = \mu |z|. \tag{2}$$

(Denn nach Voraussetzung ist bei gegebenem $\varepsilon > 0$ und $z \neq 0$ von der Doppelgleichung

$$\mu - \varepsilon/|z| < \sqrt[n]{|a_n|} < \mu + \varepsilon/|z|$$

die linke Hälfte für unendlich viele n, die rechte für alle n von einer Stelle an erfüllt. Dasselbe gilt dann auch von der mit $|z|$ multiplizierten Ungleichung, was die obige Aussage beweist.)

Nach dem Wurzelkriterium (Elem., § 28) ist also $\sum a_n z^n$ absolut konvergent, wenn $\mu |z| < 1$ ist. Das ist, wenn $\mu = 0$ ist, für alle z der Fall, wenn $\mu > 0$ ist, für alle $|z| < 1/\mu$. Im Falle $\mu > 0$ ist aber, wieder nach dem Wurzelkriterium, $\sum a_n z^n$ divergent, sobald $|z| > 1/\mu$ ist.

2) Im Falle $\mu = +\infty$ ist für jedes $z \neq 0$ auch $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = +\infty$, was man ebenso leicht beweist, wie die bei (2) gemachte Aussage. Also ist $\sum a_n z^n$ für jedes $z \neq 0$ divergent.

Über das Konvergenzverhalten der Reihe in den Randpunkten des Konvergenzkreises sagt der Satz nichts aus. Es ist auch von Fall zu Fall verschieden: $\sum z^n$ ist in keinem, $\sum \frac{z^n}{n^2}$ in allen, $\sum \frac{z^n}{n}$ in gewissen (aber nicht allen) Randpunkten[1]) konvergent.

[1]) Für alle drei Reihen ist $r = 1$.

Sind die $f_n(z)$ komplizierterer Natur, so ist die Feststellung des genauen Konvergenzbereiches meist mit Schwierigkeiten verknüpft.

In jedem Falle aber ist die Summe einer Reihe $\Sigma f_n(z)$ für jeden Punkt ihres Konvergenzbereiches eine bestimmte Zahl, ist also (vgl. § 5) eine für alle Punkte von $\mathfrak{M}$ definierte Funktion $f(z)$. Die unendliche Reihe ist die Zuordnungsvorschrift, durch die nach § 5 eine Funktion definiert sein sollte. Man sagt: Die Reihe stellt in $\mathfrak{M}$ die Funktion $f(z)$ dar oder $f(z)$ läßt sich dort in die Reihe entwickeln; z. B. $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ stellt im Einheitskreis die Funktion $\frac{1}{1-z}$ dar, oder diese ist dort in jene Potenzreihe entwickelbar.

Da wir die regulären Funktionen schon als besonders wertvoll erkannt haben, so entsteht die Frage: Wann stellt eine Reihe eine solche reguläre Funktion dar?

Um hierauf eine allgemeine Antwort geben zu können, bedürfen wir des Begriffs der gleichmäßigen Konvergenz, den wir im folgenden Paragraphen entwickeln wollen.

Aufgaben: 1. Man bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, wenn

$$\alpha)\ a_n = \frac{1}{n^n}, \quad \beta)\ a_n = n^{\log n}, \quad \gamma)\ a_n = \frac{n!}{n^n}$$

gesetzt wird.

2. Man bestimme den Konvergenzbereich von $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$, wenn

$$\alpha)\ f_n(z) = \frac{1}{n^z}, \text{ d. h. } = e^{-z \log n}\ (\log n \geqq 0),$$

$$\beta)\ f_n(z) = \frac{z^n}{1-z^n}$$

gesetzt wird. Man bestimme also den Konvergenzbereich der Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n}.$$

§ 18. Gleichmäßige Konvergenz

Besitzt die Reihe $\Sigma f_n(z)$ den Konvergenzbereich $\mathfrak{M}$, so heißt dies: Ist z_1 ein beliebiger Punkt aus $\mathfrak{M}$, so läßt sich, wenn $\varepsilon > 0$ gegeben ist, eine Zahl $n_1 = n_1(\varepsilon)$ so bestimmen, daß

$$|f_{n+1}(z_1) + f_{n+2}(z_1) + \cdots + f_{n+p}(z_1)| < \varepsilon$$

ist für alle $n \geqq n_1$ und alle $p \geqq 1$. Wählt man einen anderen Punkt z_2 aus $\mathfrak{M}$, so ist entsprechend n_2 bestimmbar, usw. Nachdem ε gegeben ist, entspricht also jedem Punkt z aus $\mathfrak{M}$ eine solche ganze Zahl $n_z = n_z(\varepsilon)$, derart, daß ein beliebig langes Stück der für dies z angesetzten Reihe, das hinter dem n_z-ten Gliede beginnt, absolut genommen $< \varepsilon$ ist. Die Größe von n_z, das man sich bei gegebenem ε und z möglichst klein genommen denke, ist sozusagen ein Maß für die Schnelligkeit der Konvergenz: ist n_z sehr groß, so konvergiert die Reihe langsam in dem Punkte z, ist es klein, so konvergiert sie schnell.

Gibt es nun eine Zahl N, die größer ist als alle Zahlen n_z, die den Punkten z aus $\mathfrak{M}$ entsprechen, so würde dies bedeuten: wenn $n \geqq N$ und $p \geqq 1$ beliebig sind, so ist

$$|f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \cdots + f_{n+p}(z)| < \varepsilon$$

für jeden Punkt z in $\mathfrak{M}$; denn n ist ja nun auch größer als jedes einzelne n_z. Das eben genannte Maß für die Konvergenz ließe sich also in gleicher Weise für alle Punkte von $\mathfrak{M}$ angeben. Man sagt dann kurz: die Reihe **konvergiert gleichmäßig** in $\mathfrak{M}$.

Wir haben also die folgende

Erklärung. *Die Reihe $\Sigma f_n(z)$ konvergiert gleichmäßig im Bereiche $\mathfrak{M}$*[1]*, wenn sich nach Wahl von $\varepsilon > 0$* **eine** (*nur von ε und nicht von z abhängende*) *positive ganze Zahl $N = N(\varepsilon)$*

[1]) Von einer gleichmäßigen Konvergenz kann also immer nur in unendlichen Punktmengen $\mathfrak{M}$ (besonders in Gebieten), nie in einzelnen Punkten gesprochen werden. — Man beachte, daß es mit der obigen Erklärung verträglich ist, daß endlich viele der Funktionen $f_\nu(z)$ in $\mathfrak{M}$ nicht beschränkt sind, wie z. B. bei der Reihe $1/z + z + z^2 + \cdots$ in $0 < |z| \leqq \varrho < 1$.

so angeben läßt, daß für alle $n \geqq N$, *alle* $p \geqq 1$ *und alle* z *in* $\mathfrak{M}$

$$(1) \qquad |f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \cdots + f_{n+p}(z)| < \varepsilon \qquad \textit{ist.}$$

Da die Reihe in z konvergieren soll und man also p über alle Grenzen wachsen lassen darf, so folgt, daß für alle z in $\mathfrak{M}$ und alle $n \geqq N$ der Betrag eines jeden „Restes"

$$(2) \qquad |R_n(z)| = \Big|\sum_{\nu=n+1}^{\infty} f_\nu(z)\Big| \leqq \varepsilon$$

bleibt, wenn die Reihe in $\mathfrak{M}$ gleichmäßig konvergiert.

Hiernach ist z. B. $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ in seinem Konvergenzbereiche (dem Einheitskreise) nicht gleichmäßig konvergent, denn $\sum_{\nu=n+1}^{\infty} z^\nu = \frac{z^{n+1}}{1-z}$ kann, was auch n sei, sogar beliebig groß gemacht werden, wenn man nur z auf der Strecke $0 \ldots 1$ dicht genug bei 1 wählt.

Dies Beispiel lehrt zugleich, daß eine Potenzreihe in ihrem ganzen Konvergenzkreise nicht gleichmäßig zu konvergieren braucht. Dagegen gilt der

Satz 1. *Eine Potenzreihe konvergiert gleichmäßig in jedem zum Konvergenzkreise konzentrischen kleineren Kreise. — Die Gleichmäßigkeit der Konvergenz kann also nur in der Nähe des Randes gestört sein.*

Beweis. $\Sigma a_n(z - z_0)^n$ habe den Radius $r > 0$; es sei $0 < \varrho < r$ und z ein beliebiger Punkt, für den $|z - z_0| \leqq \varrho$ ist; dann ist

$$\Big|\sum_{\nu=n+1}^{n+p} a_\nu (z - z_0)^\nu\Big| \leqq \sum_{\nu=n+1}^{n+p} |a_\nu|\, \varrho^\nu$$

für alle diese z. Nun ist aber, weil der Punkt $z = z_0 + \varrho$ im Innern des Konvergenzkreises liegt, $\Sigma |a_n| \varrho^n$ konvergent,

und es läßt sich daher nach Angabe von $\varepsilon > 0$ eine Zahl N so angeben, daß für alle $n \geqq N$ und alle $p \geqq 1$

$$|a_{n+1}|\varrho^{n+1} + \cdots + |a_{n+p}|\varrho^{n+p} < \varepsilon$$

ist. Für alle $|z - z_0| \leqq \varrho$, alle $n \geqq N$ und alle $p \geqq 1$ ist dann ebenfalls

$$|a_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \cdots + a_{n+p}(z - z_0)^{n+p}| < \varepsilon.$$

w. z. b. w.

Allgemein gilt das folgende sog. Majorantenkriterium, das auch als **Weierstraßscher Konvergenzsatz** bezeichnet wird:

Satz 2. *Sind die positiven Zahlen* $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n, \ldots$ *so beschaffen, daß für alle* z *eines Teiles* $\mathfrak{M}'$ *des Konvergenzbereichs der Reihe* $\sum f_n(z)$

$$|f_n(z)| \leqq \gamma_n, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

ist und daß

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n$$

konvergiert, so ist $\sum f_n(z)$ *in* $\mathfrak{M}'$ *gleichmäßig konvergent.*

Der Beweis ist ganz analog wie in dem eben gegebenen speziellen Falle.

Aufgaben: 1. Man untersuche die in § 17, Aufgabe 2 gegebenen Reihen auf die Gleichmäßigkeit der Konvergenz hin.

2. Man beweise, daß die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ in ihrem abgeschlossenen Konvergenzkreise $|z| \leqq 1$ gleichmäßig konvergiert.

§ 19. Gleichmäßig konvergente Reihen analytischer Funktionen

Wir machen nun die weitere Voraussetzung, daß die sämtlichen Funktionen $f_n(z)$ analytische Funktionen sind; dann werden wir zeigen, daß auch die durch die Reihe dargestellte Funktion analytisch ist. Genauer:

Es sei $f_0(z), f_1(z), \ldots$ eine unendliche Folge von Funktionen, die sämtlich in ein und demselben Gebiet $\mathfrak{G}$ regulär sind, und die Reihe $\Sigma f_n(z)$ sei auf jeder kompakten Teilmenge $\mathfrak{G}'$ von $\mathfrak{G}$[1]) gleichmäßig konvergent. Dann gelten die folgenden drei Sätze:

Satz 1. *Die Reihe $\Sigma f_n(z)$ stellt eine in $\mathfrak{G}$ stetige Funktion $F(z)$ dar.*

Satz 2. *Es konvergiert jede durch gliedweise Integration längs eines Weges $\mathfrak{k}$ in $\mathfrak{G}$ entstehende Reihe und liefert das entsprechende Integral von $F(z)$; in Zeichen:*

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} {}^{\mathfrak{k}}\!\int f_n(z)\,dz \text{ ist konvergent und } = {}^{\mathfrak{k}}\!\int F(z)\,dz.$$

Satz 3. *Es ist $F(z)$ eine in $\mathfrak{G}$ reguläre Funktion, und es konvergiert überall in $\mathfrak{G}$ jede durch p-malige gliedweise Differentiation entstehende Reihe — und sogar gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge $\mathfrak{G}'$ von $\mathfrak{G}$ — und liefert dort die entsprechende Ableitung von $F(z)$; in Zeichen: Für festes $p = 0, 1, 2, \ldots$ ist*

$$(2) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(p)}(z) \text{ in } \mathfrak{G} \text{ konvergent und } = F^{(p)}(z).$$

Beweise:

1. $\varepsilon > 0$ und z_0 in $\mathfrak{G}$ seien gegeben. Dann genügt es zu zeigen, daß

$$|F(z) - F(z_0)| = |\Sigma f_n(z) - \Sigma f_n(z_0)| < 3\varepsilon$$

ist für alle hinreichend nahe an z_0 gelegenen z aus $\mathfrak{G}$.

Dazu wählen wir zunächst eine abgeschlossene Kreisscheibe $\mathfrak{G}'$ um z_0, die ganz in $\mathfrak{G}$ liegt. Nach § 18 ist dann N so bestimmbar, daß, wenn allgemein

[1]) D. h. also: auf jeder abgeschlossenen und beschränkten Teilmenge $\mathfrak{G}'$ von $\mathfrak{G}$, deren Punkte also sämtlich im Innern des Gebietes $\mathfrak{G}$ liegen.

$$\sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(z) = s_n(z) \text{ und } \sum_{\nu=n+1}^{\infty} f_\nu(z) = r_n(z)$$

gesetzt wird, für alle z in $\mathfrak{G}'$

$$|\, r_N(z)\,| \leqq \varepsilon$$

ist. Beschränkt man dann z auf eine so kleine, in $\mathfrak{G}'$ gelegene Umgebung von z_0, daß für alle dort gelegenen z

$$|\, s_N(z) - s_N(z_0)\,| < \varepsilon$$

ist, — da $s_N(z)$ als Summe von endlich vielen stetigen Funktionen selbst stetig ist, so ist eine solche Umgebung sicher bestimmbar —, so ist wirklich

$$\begin{aligned} |\, F(z) - F(z_0)\,| &\leqq |\, s_N(z) - s_N(z_0)\,| + |\, r_N(z)\,| + |\, r_N(z_0)\,| \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon, \quad \text{w. z. b. w.} \end{aligned}$$

2. Da $F(z)$ sich somit als eine in $\mathfrak{G}$ stetige Funktion erwiesen hat, so ist das in der zweiten Behauptung auftretende Integral über $F(z)$ jedenfalls vorhanden. Nun ist $\mathfrak{k}$ eine kompakte Teilmenge von $\mathfrak{G}$ und $\Sigma f_n(z)$ also auf $\mathfrak{k}$ gleichmäßig konvergent. Daher kann bei gegebenem $\varepsilon > 0$ ein N so bestimmt werden, daß für alle $n > N$ und alle z auf $\mathfrak{k}$ stets $|\, r_n(z)\,| \leqq \varepsilon$ ist. Nach § 11, Satz 4 ist dann zunächst (für jedes n)

$$\int_{\mathfrak{k}} F(z)\,dz = \int_{\mathfrak{k}} s_n(z)\,dz + \int_{\mathfrak{k}} r_n(z)\,dz$$

und nach demselben Satze weiter

$$\int_{\mathfrak{k}} s_n(z)\,dz = \int_{\mathfrak{k}} f_0(z)\,dz + \int_{\mathfrak{k}} f_1(z)\,dz + \cdots + \int_{\mathfrak{k}} f_n(z)\,dz.$$

Folglich ist für jedes $n > N$

$$\left|\, \int_{\mathfrak{k}} F(z)\,dz - \sum_{\nu=0}^{n} \int_{\mathfrak{k}} f_\nu(z)\,dz \,\right| = \left|\, \int_{\mathfrak{k}} r_n(z)\,dz \,\right| \leqq \varepsilon \cdot l,$$

wenn l die Länge des Weges $\mathfrak{k}$ bezeichnet. Da aber εl durch geeignete Wahl von ε beliebig klein gemacht werden kann, so bedeutet dies genau, daß die Behauptung (1) gilt.

Man erkennt nachträglich, daß es bei den Sätzen 1 und 2 genügt, die $f_n(z)$ als stetig vorauszusetzen, und bei Satz 2 dann weiter nur, daß $\Sigma f_n(z)$ längs des Weges $\mathfrak{k}$ gleichmäßig konvergiert. In Erweiterung von § 11, Satz 4 kann man also insbesondere den Satz aussprechen:

Satz 2a. *Auch eine unendliche Reihe (stetiger Funktionen) darf gliedweise integriert werden, wenn nur die Reihe längs des Integrationsweges gleichmäßig konvergiert.*

3. Es sei z_0 ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{G}$. Dann genügt es zu zeigen, daß $F(z)$ in z_0 regulär ist. Dazu wählen wir eine abgeschlossene Kreisscheibe $\mathfrak{G}'$ um z_0, die noch ganz in $\mathfrak{G}$ liegt. Ist dann $\mathfrak{C}$ ein beliebiger innerhalb $\mathfrak{G}'$ liegender geschlossener Weg, so ist $\Sigma f_n(z)$ längs $\mathfrak{C}$ gleichmäßig konvergent, nach 2. also

$$\int_{\mathfrak{C}} F(z)\,dz = \int_{\mathfrak{C}} (\Sigma f_n(z))\,dz = \Sigma \int_{\mathfrak{C}} f_n(z)\,dz,$$

also $= 0$, denn jeder Summand ist nach dem Cauchyschen Integralsatze einzeln $= 0$. Nach dem Moreraschen Satze (§ 16, Satz 4) ist daher $F(z)$ innerhalb $\mathfrak{G}'$, insbesondere also in z_0 regulär.

Für die nun sicher vorhandene p-te Ableitung $F^{(p)}(z_0)$ hat man aus demselben Grunde wie eben, wenn $\mathfrak{C}$ jetzt etwa eine innerhalb $\mathfrak{G}'$ liegende Kreislinie um z_0 bedeutet,

$$F^{(p)}(z_0) = \frac{p!}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} \frac{F(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{p+1}}\,d\zeta$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p!}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{p+1}}\,d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(p)}(z_0),$$

womit der zweite Teil des Satzes 3 bewiesen ist.

Ist nun $\mathfrak{G}''$ eine Kreisscheibe um z_0, die wiederum innerhalb $\mathfrak{C}$ liegt, und ist der Abstand zwischen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{G}''$ gleich $\varrho\,(>0)$, so ergibt sich für jedes z von $\mathfrak{G}''$ aus der leicht verständlichen Abschätzung

$$\left| \sum_{\nu=n+1}^{n+r} f_\nu^{(p)}(z) \right| = \left| \frac{p!}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} \frac{\sum_{\nu=n+1}^{n+r} f_\nu(\zeta)}{(\zeta - z)^{p+1}} d\zeta \right| \leqq \frac{p!}{2\pi} \cdot l \frac{\varepsilon}{\varrho^{p+1}},$$

daß $\Sigma f_n^{(p)}(z)$ auf $\mathfrak{G}''$ sogar gleichmäßig konvergiert. Um jeden Punkt z von $\mathfrak{G}$ gibt es also eine Kreisscheibe $\mathfrak{K}_z$, auf der diese Reihe gleichmäßig konvergiert. Nach dem Heine-Borelschen Satze (§ 3, Satz 3) folgt hieraus sofort, daß sie auch auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathfrak{G}$ gleichmäßig konvergiert. (Vgl. hierzu noch die nachstehende Aufgabe 2.)

Anwendung auf Potenzreihen: Es sei $f_n(z) = a_n(z - z_0)^n$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, so daß $\Sigma f_n(z)$ zu der Potenzreihe $\Sigma a_n(z - z_0)^n$ wird. Ist ihr Konvergenzradius $r > 0$, so kann ihr Konvergenzkreis $|z - z_0| < r$ als das Gebiet $\mathfrak{G}$ genommen werden. Denn jede kompakte Teilmenge $\mathfrak{G}'$ von $\mathfrak{G}$ liegt für passendes ϱ mit $0 < \varrho < r$ in dem Kreise $|z - z_0| \leqq \varrho$, und die Potenzreihe ist also (wegen § 18, Satz 1) auf jeder solchen Teilmenge $\mathfrak{G}'$ von $\mathfrak{G}$ gleichmäßig konvergent. Also gilt der

Satz 5. *Eine Potenzreihe $\Sigma a_n(z - z_0)^n$ stellt im Innern des Konvergenzkreises eine dort reguläre Funktion $f(z)$ dar; deren Ableitungen erhält man durch gliedweise Differentiation der Potenzreihe, und diese abgeleiteten Potenzreihen haben denselben Konvergenzradius wie die gegebene:*

$$f^{(p)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1)\, a_n(z - z_0)^{n-p}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)\cdots(n+p)\, a_{n+p}(z - z_0)^n$$

$$= p! \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+p}{p} a_{n+p}(z - z_0)^n$$

ist für $|z - z_0| < r$ konvergent.

Speziell ist

$$f^{(p)}(z_0) = p!\, a_p, \quad a_p = \frac{1}{p!} f^{(p)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{p+1}} d\zeta,$$

wenn $\mathfrak{C}$ die Peripherie $|z - z_0| = \varrho$ bedeutet. Aus der letzten Formel folgt noch — wir schreiben n statt p — die nützliche **Cauchysche Abschätzungsformel**

$$|a_n| \leqq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi\varrho \cdot \frac{M}{\varrho^{n+1}} = \frac{M}{\varrho^n},$$

wenn M das Maximum von $|f(z)|$ auf $|z - z_0| = \varrho$ ist.

Aufgaben: 1. Man untersuche, ob die in § 17, Aufgabe 2 gegebenen Reihen in ihren Konvergenzgebieten analytische Funktionen darstellen.

2. Im Anschluß an die Aufgaben der §§ 9 und 11 zeige man, daß, wenn neben der Reihe $\Sigma f_n(z)$ auch die Reihe $\Sigma |f_n(z)|$ in jedem $\mathfrak{G}'$ gleichmäßig konvergiert, der Satz 3 dahin verschärft werden kann, daß auch die Reihen $\Sigma |f_n^{(p)}(z)|$ bei festem p in jedem $\mathfrak{G}'$ noch gleichmäßig konvergieren.

7. Kapitel. Die Entwicklung analytischer Funktionen in Potenzreihen

Die Sätze des vorigen Kapitels haben gelehrt, daß die Eigenschaft der Potenzreihen, in ihrem Konvergenzgebiet reguläre Funktionen darzustellen, sehr viel allgemeineren Reihen zukommt, nämlich allen gleichmäßig konvergenten Reihen, deren Glieder selbst reguläre Funktionen sind. Die große Bedeutung der Potenzreihen für das Studium der analytischen Funktionen kann also nicht in dieser Eigenschaft begründet sein. Sie beruht vielmehr auf der Umkehrung dieser Tatsache: jede reguläre Funktion läßt sich auch umgekehrt durch eine Potenzreihe darstellen. Die Gesamtheit aller nur möglichen Potenzreihen (mit positivem Radius) liefert also auch die Gesamtheit aller nur denkbaren regulären Funktionen.

§ 20. Entwicklungssatz und Identitätssatz für Potenzreihen

Satz 1. *Es sei $f(z)$ eine in einem gewissen Gebiete $\mathfrak{G}$ reguläre Funktion und z_0 ein (innerer) Punkt von $\mathfrak{G}$. Dann gibt es stets*

eine, aber auch nur eine Potenzreihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

die für eine gewisse Umgebung von z_0 konvergiert und dort die Funktion $f(z)$ darstellt. Dabei ist

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0).$$

Die Reihe konvergiert (mindestens) in dem größten Kreise um z_0 (sein Radius sei r), der nur Punkte von $\mathfrak{G}$ umschließt, und der genaue Konvergenzkreis der Reihe ist der größte Kreis um z_0 (sein Radius sei R), in dem $f(z)$ noch überall als differenzierbare Funktion erklärt oder erklärbar ist. **(Entwicklungssatz; Taylorsche Entwicklung.)**

Beweis. Es sei z ein beliebiger innerer Punkt der Kreisscheibe $\mathfrak{k}$ mit r um z_0; dann ist zunächst zu zeigen, daß bei der angegebenen Bedeutung von a_n

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ konvergiert und } = f(z) \text{ ist.}$$

Da $|z - z_0| = \varrho < r$ ist, kann man ϱ_1 so wählen, daß $\varrho < \varrho_1 < r$ ist. ζ sei ein beliebiger Punkt der Kreislinie $\mathfrak{k}_1$ mit ϱ_1 um z_0. Dann ist

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}};$$

und diese spezielle geometrische Reihe ist, da

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| = \frac{\varrho}{\varrho_1} < 1$$

ist, bezüglich ζ längs $\mathfrak{k}_1$ (nach § 18, Satz 2) gleichmäßig kon-

vergent. Dasselbe gilt dann auch von der Reihe

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n.$$

Wenn man daher beide Seiten über den Weg $\mathfrak{k}_1$ integriert, so darf diese Integration rechter Hand gliedweise ausgeführt werden, und wir sind nach § 19, Satz 2 sicher, daß die entstehende Reihe konvergiert. Es ist also, wenn noch durch $2\pi i$ dividiert wird:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{k}_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{k}_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n \, d\zeta,$$

also nach § 15 und 16

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \cdot (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

w. z. b. w.

Daß die gefundene Entwicklung die einzig mögliche ist, ergibt sich unmittelbar aus dem folgenden **Identitätssatz für Potenzreihen:**

Satz 2. *Haben die beiden Potenzreihen*

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \textit{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

einen positiven Konvergenzradius und stimmen ihre Summen für alle Punkte einer Umgebung von z_0[1]*) oder auch nur für unendliche viele (von z_0 und voneinander verschiedene) solche Punkte mit einem Häufungspunkt in z_0 überein, so sind sie miteinander identisch.*

Beweis: Läßt man z durch jene Punkte gegen den (Häufungs-)Punkt z_0 rücken, so folgt, da die Potenzreihen (1)

[1]) Unter dieser engeren Voraussetzung ergibt sich die Identität daraus, daß a_n und b_n beide $= \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$ sind.

stetige Funktionen darstellen, nach § 6, I, 3. Form, zunächst, daß $a_0 = b_0$ ist. Ist dann schon bewiesen, daß $a_\nu = b_\nu$ ist für $\nu = 0, 1, \ldots, m$, so hat man für alle jene unendlich vielen Punkte

$$a_{m+1} + a_{m+2}(z - z_0) + \cdots = b_{m+1} + b_{m+2}(z - z_0) + \cdots.$$

Läßt man durch sie wieder $z \to z_0$ rücken, so folgt weiter, daß auch

$$a_{m+1} = b_{m+1}$$

ist. Es ist also $a_n = b_n$ für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$, und die beiden Entwicklungen (1) sind somit identisch.

Beispiel. In § 14,6 ist gezeigt, daß $f(z) = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$ eine reguläre Funktion von z ist, wenn z und der (sonst beliebige) Integrationsweg auf das Innere der rechten Halbebene beschränkt bleibt. $f(z)$ muß also eine Potenzreihenentwicklung z. B. für die Umgebung von $z_0 = 1$ zulassen, für die r mindestens $= 1$ ist. Da

$$f'(z) = \frac{1}{z}, \quad f''(z) = -\frac{1}{z^2}, \ldots,$$

$$f^{(n)}(z) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{z^n}, \ldots$$

ist, so ergibt sich für $z = z_0 = 1$:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = -\frac{1}{2}, \ldots, \quad a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \ldots,$$

so daß

$$f(z) = (z-1) - \frac{1}{2}(z-1)^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n + \cdots$$

ist. Die gefundene Entwicklung ist die einzig mögliche. Es zeigt sich, daß r genau $= 1$ ist.

Bei Funktionen einer reellen Veränderlichen ist eine Entwicklung derselben in Potenzreihen selbst dann nicht immer möglich, wenn die Funktion Ableitungen jeder Ordnung besitzt; hier wurde alles lediglich aus der Existenz der ersten Ableitung gefolgert.

Die gefundene Entwicklung konvergiert, wie schon betont, in dem größten Kreis $\mathfrak{K}: |z - z_0| < R$, in dessen Innern $f(z)$

noch überall als differenzierbare Funktion erklärt oder erklärbar ist.

Das letztere soll besagen: Wenn es auf irgendeine Weise möglich ist, die Erklärung der zunächst nur in $\mathfrak{k}: |z-z_0|<r$ betrachteten Funktion $f(z)$ ohne Rücksicht auf die sonstigen Punkte von $\mathfrak{G}$ in einem größeren Kreise $\mathfrak{k}': |z-z_0|<r'$, der auch über $\mathfrak{G}$ hinausreichen darf, so zu ergänzen, daß die Funktion in dem ganzen Kreise $\mathfrak{k}'$ differenzierbar ist, so konvergiert unsere Potenzreihe mindestens in $\mathfrak{k}'$, und ihr genauer Konvergenzkreis $\mathfrak{K}$ ist der größte Regularitätskreis dieser Art um z_0, d. h. der größte Kreis um z_0, für den in der angedeuteten Art eine Erklärung von $f(z)$ überhaupt möglich ist. Dabei sind natürlich auch die beiden äußersten Fälle möglich, daß $\mathfrak{K}$ gar nicht über $\mathfrak{G}$ hinausreicht oder daß er die ganze Ebene bedeckt.

Diese ganz besonders merkwürdigen Dinge werden im nächsten Kapitel und im IV. Abschn. eingehend untersucht werden. Im Augenblick sollen nur zwei spezielle Folgerungen aus unseren Sätzen gezogen werden:

Um die Potenzreihenentwicklung einer gegebenen Funktion zu erhalten, benutzt man häufig mit Vorteil den **Weierstraßschen Doppelreihensatz:**

Satz 3. *Für $n=0,1,2,\ldots$ seien die Funktionen*

$$f_n(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(n)}(z-z_0)^k$$

sämtlich mindestens für $|z-z_0|<r$ regulär, und es sei

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)=$$

$$\begin{aligned}
&=(a_0^{(0)}+a_1^{(0)}(z-z_0)+\cdots+a_k^{(0)}(z-z_0)^k+\cdots)\\
&+(a_0^{(1)}+a_1^{(1)}(z-z_0)+\cdots+a_k^{(1)}(z-z_0)^k+\cdots)\\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+(a_0^{(n)}+a_1^{(n)}(z-z_0)+\cdots+a_k^{(n)}(z-z_0)^k+\cdots)\\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

für $|z - z_0| \leqq \varrho < r$ *gleichmäßig konvergent und dies für jedes* $\varrho < r$. *Dann sind die Reihen aus den vertikal untereinander stehenden Koeffizienten konvergent; und wenn man für* $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$a_k^{(0)} + a_k^{(1)} + \cdots + a_k^{(n)} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_k^{(n)} = A_k$$

setzt, so ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k (z - z_0)^k$$

die mindestens für $|z - z_0| < r$ *konvergente Potenzreihenentwicklung von* $F(z)$ *für eine Umgebung von* z_0[1]).

Beweis: Nach § 19, Satz 3 ist $F(z)$ für $|z - z_0| < r$ regulär und also nach dem Entwicklungssatz dort in eine Potenzreihe entwickelbar. Deren k-ter Koeffizient ist

$$= \frac{1}{k!} F^{(k)}(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f_n^{(k)}(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_k^{(n)} = A_k,$$

womit schon alles bewiesen ist.

Endlich beweisen wir den ebenso merkwürdigen wie wichtigen

Satz 4. *Eine analytische Funktion* $f(z)$ *vermag in keinem Punkte* z_0 *eines Regularitätsgebietes* $\mathfrak{G}$ *ein Maximum des Betrages zu besitzen*[2]), *außer wenn dort* $f(z)$ *überall denselben Wert* $f(z_0)$ *hat.*

Beweis: In einer Umgebung von z_0 hat man

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots \text{ (mit } r > 0).$$

Ist in dieser Umgebung nicht überall $f(z) = f(z_0) = a_0$, so ist unter den auf a_0 folgenden Koeffizienten mindestens einer

[1]) D. h. man darf unter den gemachten Voraussetzungen die unendlich vielen Potenzreihen gliedweise addieren.

[2]) D. h. einen Wert, dessen Betrag $\geqq$ allen Werten von $|f(z)|$ in einer Umgebung von z_0 wäre.

von 0 verschieden. Es sei a_m $(m \geqq 1)$ der erste dieser Art. Dann setzen wir mit $A \geqq 0$

$a_0 = Ae^{i\alpha}$, $a_m = A'e^{i\alpha'}$ $(A' > 0)$, $z - z_0 = \varrho e^{i\varphi}$ $(0 < \varrho < r)$, so daß

$$f(z) = Ae^{i\alpha} + A'e^{i\alpha'}\varrho^m e^{im\varphi} + a_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \cdots$$

ist. Über φ verfügen wir nun so, daß $\alpha' + m\varphi = \alpha$ wird[1]). Dann ist

$$\begin{aligned} f(z) &= (A + A'\varrho^m)\, e^{i\alpha} + a_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \cdots \\ |f(z)| &\geqq A + A'\varrho^m - (|a_{m+1}|\varrho^{m+1} + \cdots) \\ &\geqq A + \varrho^m[A' - (|a_{m+1}|\varrho + \cdots)]. \end{aligned}$$

Hierin kann man wegen der Stetigkeit der in der runden Klammer stehenden Potenzreihe für ϱ eine so kleine Zahl ϱ_0 wählen, daß $(|a_{m+1}|\varrho_0 + \cdots) < \frac{1}{2}A'$ ist. Dann ist für alle ϱ mit $0 < \varrho < \varrho_0$

$$|f(z)| > A + \tfrac{1}{2}A'\varrho^m > |f(z_0)|,$$

d. h. für alle auf einem bestimmten von z_0 ausgehenden Radius hinreichend nahe bei z_0 gelegenen Punkte z ist tatsächlich $|f(z)| > |f(z_0)|$. Ist aber in der betrachteten Umgebung von z_0 überall $f(z) = f(z_0)$, so lehrt der im folgenden Paragraphen bewiesene Identitätssatz für analytische Funktionen, daß $f(z)$ in $\mathfrak{G}$ überall den Wert $f(z_0)$ hat.

Nur eine andre Fassung dieses Ergebnisses ist der folgende Satz, den man als das **Prinzip vom Maximum** bezeichnet:

Satz 5. *Das Maximum des Betrages einer in einem beschränkten und abgeschlossenen Gebiete regulären Funktion liegt stets auf dem Rande dieses Gebietes.*

Aufgabe: Man entwickle die in § 17, Aufgabe 2 gegebenen Reihen in Potenzreihen mit dem Mittelpunkt $z_0 = 2$ (für die erste) und $z_0 = 0$ (für die zweite).

---

[1]) D. h. wir wählen unter den von z_0 ausgehenden Radien einen bestimmten aus.

§ 21. Der Identitätssatz für analytische Funktionen

Aus dem Cauchyschen Satze und der mit seiner Hilfe gewonnenen Taylorschen Entwicklung einer regulären Funktion lassen sich nun die wichtigsten Folgerungen ziehen, die uns das eigentliche Wesen der regulären analytischen Funktionen erst werden erkennen lassen. Um darauf hinzulenken, mögen folgende Vorbemerkungen Platz finden:

Die Funktionen, die unter den in § 5 aufgestellten allgemeinsten Funktionsbegriff fallen, sind so willkürlicher Art, daß aus ihrem Verhalten in einem Teile ihres Definitionsgebietes $\mathfrak{M}$ gar nichts über das in einem anderen Teile desselben gefolgert werden kann. Ist etwa $\mathfrak{M}$ die ganze z-Ebene und ist $f(z) = 3i$ für $|z| \leqq 1$, so folgt daraus nichts über die Werte der Funktion für $|z| > 1$, denn für diese kann ja eine ganz neue Zuordnungsvorschrift gegeben sein (vgl. das Beispiel S. 28). Anders ist es schon, wenn die Funktion stetig sein soll; dann müssen in dem letzten Beispiel die Werte von $f(z)$ für nahe am Einheitskreise gelegene Punkte ihrerseits nahe bei $3i$ gelegen sein. Es besteht also ein gewisser Zwang für die Funktion; die Funktionswerte sind durch eine gewisse Gesetzmäßigkeit untereinander verbunden. Diese innere Gesetzmäßigkeit, die die Funktionswerte untereinander verknüpft und aus den Werten der Funktion in einem Teil der z-Ebene über die in den benachbarten Teilen mehr oder weniger Genaues schließen läßt, — diese Gesetzmäßigkeit wird offenbar um so stärker, je speziellere Klassen von Funktionen man aus der Gesamtheit aller Funktionen aussondert. Ein Beispiel aus der Lehre der reellen Funktionen einer reellen Veränderlichen x mag dies deutlicher machen:

Beschränkt man sich hier z. B. auf die Untersuchung der ganzen rationalen Funktionen 3. Grades (der Kurven 3. Ordnung)

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a^3 x^3, \quad (a_\nu, x, y \text{ reell})$$

so ist eine solche Funktion bzw. Kurve schon durch ganz wenige Forderungen (Angaben) vollständig bestimmt. Weiß man etwa, daß die Kurve durch vier bestimmte Punkte geht (d. h. kennt man die Funktionswerte für vier verschiedene Werte von x), so ist die Funktion schon vollständig festgelegt — die vier Punkte mögen noch so dicht beieinander liegen. Aus dem Verlauf der Funktion in einem beliebig kleinen Intervall kann also der Verlauf der Kurve mit allen ihren Eigenschaften in der ganzen xy-Ebene erschlossen werden. Die Klasse der ganzen rationalen Funktionen 3. Grades bietet also eine sehr starke innere Gesetzmäßigkeit dar, durch die die Funktionswerte untereinander verkettet sind.

Es ist klar, daß für die Anwendungen in den mathematischen Naturwissenschaften in erster Linie nur Funktionen in Betracht kommen, die eine solche innere Gesetzmäßigkeit besitzen, da das Naturgeschehen selbst von innerer Gesetzmäßigkeit ist.

Es ist nun das außerordentlich Merkwürdige, daß aus der Gesamtheit der allgemeinsten Funktionen komplexen Argumentes allein durch die eine Forderung der Differenzierbarkeit, oder also: durch die Forderung der Regularität, eine Klasse von Funktionen ausgesondert wird, die einerseits noch sehr allgemeiner Art sind und zu denen fast alle in den Anwendungen auftretenden Funktionen gehören, die aber auf der anderen Seite eine so starke innere Gesetzmäßigkeit besitzen, daß aus ihrem Verhalten in einem (wenn auch noch so kleinen) Teilgebiete der z-Ebene auf das in der ganzen übrigen Ebene geschlossen werden kann. Wir werden nämlich — um das wichtigste Resultat vorwegzunehmen — zeigen, daß eine analytische Funktion mit allen ihren Eigenschaften vollständig bestimmt ist, wenn die Werte der Funktion längs eines (sonst beliebig) kleinen Kurvenstückchens bekannt sind. Oder: zwei analytische Funktionen, die längs eines solchen Kurvenstückchens übereinstimmen, sind vollständig identisch.

Ein erster Satz in dieser Richtung war die Cauchysche Formel (vgl. hierzu das S. 64 Gesagte), die aus den Funktionswerten längs eines Randes $\mathfrak{C}$ auf die Werte der Funktion im Innern von $\mathfrak{C}$ zu schließen gestattete.

Ein zweiter war der Identitätssatz für Potenzreihen § 20, Satz 2. Ein drittes Ergebnis dieser Art war die Aussage über die Größe des wahren Konvergenzkreises der Potenzreihen beim Entwicklungssatz, da hier schon Punkte der Ebene mit in Betracht gezogen wurden, die gar nicht zum ursprünglichen Definitionsgebiete der gegebenen Funktion gehörten.

Auf Grund des Entwicklungssatzes sind wir nun in der Lage, ein Ergebnis herzuleiten, das zu dem ausgesprochenen Satze und noch darüber hinaus führt, und das wegen seiner großen Bedeutung für den Aufbau der Funktionentheorie neben dem Cauchyschen Integralsatze als das Grundlegendste bezeichnet werden muß:

Identitätssatz für analytische Funktionen. *Sind zwei Funktionen in einem Gebiete $\mathfrak{G}$ regulär und stimmen sie in einer (wenn auch noch so kleinen) Umgebung eines zu $\mathfrak{G}$ gehörigen Punktes z_0 überein oder tun sie dies auch nur längs eines (wenn auch noch so kleinen) von z_0 ausgehenden Wegstückchens oder auch nur in unendlich vielen (verschiedenen) sich in z_0 häufenden Punkten —, so sind die beiden Funktionen überall in $\mathfrak{G}$ einander gleich.*

Beweis. Nach dem Entwicklungssatz sind beide Funktionen — wir nennen sie $f_1(z)$ und $f_2(z)$ — für z_0 als Mittelpunkt in Potenzreihen entwickelbar, die mindestens in dem größten Kreise um z_0 — er heiße $\mathfrak{K}_0$ — konvergieren, der noch ganz in $\mathfrak{G}$ liegt. Auf Grund der gemachten Voraussetzungen folgt aber unmittelbar aus dem Identitätssatz für Potenzreihen, daß diese beiden Entwicklungen übereinstimmen. Überall in $\mathfrak{K}_0$ ist also $f_1(z) = f_2(z)$.

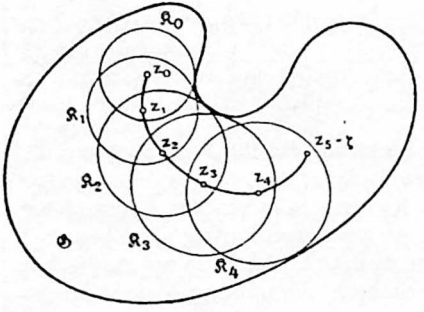

Fig. 5

Ist nun ζ ein beliebiger Punkt aus $\mathfrak{G}$, so ist zu zeigen, daß auch $f_1(\zeta) = f_2(\zeta)$ ist. Dazu verbinde man (vgl. Fig. 5) z_0 mit ζ durch einen ganz in $\mathfrak{G}$ verlaufenden Weg $\mathfrak{k}$. Es sei ϱ die nach § 4, Hilfssatz 3 bestimmbare positive Größe. Dann teile man den Weg $\mathfrak{k}$ durch die Teilpunkte $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{m-1}, z_m = \zeta$ irgendwie so in Teilstücke, daß deren Längen sämtlich $< \varrho$ sind. Zeichnet man dann um jeden der Punkte z_ν den größten Kreis $\mathfrak{K}_\nu$, der noch ganz in $\mathfrak{G}$ liegt, so sind deren Radien alle $\geqq \varrho$, und es enthält daher jeder von ihnen den Mittelpunkt des folgenden. Wir sagen kurz: sie bilden eine Kreiskette. Um jeden der Punkte z_ν denken wir uns nun die Funktionen $f_1(z)$ und $f_2(z)$ in Potenzreihen entwickelt, wie soeben für $\nu = 0$. Die Entwicklungen konvergieren jeweils mindestens in $\mathfrak{K}_\nu$. In $\mathfrak{K}_0$ waren sie schon als identisch erkannt; also stimmen $f_1(z)$ und $f_2(z)$ auch in dem (in $\mathfrak{K}_0$ gelegenen) Punkte z_1 und Umgebung überein. Daher stimmen (wieder nach dem Identitätssatz für Potenzreihen) auch die beiden Entwicklungen in $\mathfrak{K}_1$ überein, so daß die Funktionen auch in z_2 und Umgebung einander gleich sein müssen. Daher haben sie auch in $\mathfrak{K}_2$ gleiche Entwicklungen usw. Der m-te Schritt dieser Art lehrt: Die Funktionen stimmen in $z_m = \zeta$ (und Umgebung) überein. Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Das eigentümliche hierbei verwandte Verfahren nennt man wegen der dabei entstehenden Figur das **Kreiskettenverfahren.**

Mit den wichtigsten Folgerungen aus diesem Satze wollen wir uns in dem nächsten Kapitel genauer beschäftigen und jetzt nur einige ganz einfache hervorheben.

Zu ihrer bequemen Formulierung bedienen wir uns der folgenden

Erklärung. *Eine Stelle z_0 eines Regularitätsgebietes der Funktion $f(z)$, in der $f(z_0) = 0$ ist, heißt eine* **Nullstelle** *der Funktion. Ist allgemeiner $f(z_0) = a$, so heißt z_0 eine a-Stelle von $f(z)$.* — Dann gilt der

Satz 1. *Ist $f(z)$ eine in $\mathfrak{G}$ reguläre Funktion, so besitzt sie in jedem beschränkten und abgeschlossenen Teilgebiet $\mathfrak{G}'$ von $\mathfrak{G}$ nur höchstens endlich viele a-Stellen, welche Zahl auch a sein mag, außer wenn $f(z)$ überall $= a$ ist*[1]).

Beweis. Gesetzt $f(z)$ hätte in $\mathfrak{G}'$ unendlich viele a-Stellen, so besäßen diese dort eine Häufungsstelle z_0, die somit auch in $\mathfrak{G}$ läge. Die Funktion nun, die in jedem Punkte der Ebene $= a$ ist, ist gewiß überall, speziell in $\mathfrak{G}$ regulär; mit ihr müßte dann aber $f(z)$ nach dem Identitätssatze übereinstimmen.

Man kann dies Ergebnis auch in die folgende für seine Anwendungen oft bequemere Form kleiden:

Satz 2. *Ist $f(z)$ in z_0 regulär, so kann man um z_0 einen so kleinen Kreis beschreiben, daß in ihm $f(z)$ niemals wieder denselben Wert wie im Mittelpunkt annimmt —, außer wenn $f(z)$ überall diesen selben Wert hat.*

Satz 3. *Sind $f_1(z)$ und $f_2(z)$ in $\mathfrak{G}$ regulär und stimmen beide Funktionen nebst allen ihren Ableitungen auch nur in einem einzigen Punkte z_0 von $\mathfrak{G}$ überein, so sind beide Funktionen identisch.*

Beweis. Entwickelt man beide Funktionen um z_0 als Mittelpunkt, so erhält man identische Reihen, denn die Koeffizienten sind ja — von gleichen Zahlenfaktoren ab-

[1]) Oder: eine Häufungsstelle von a-Stellen liegt niemals in einem Regularitätsgebiete von $f(z)$, außer wenn überall $f(z) = a$ ist.
Oder: Die Menge der a-Stellen einer in $\mathfrak{G}$ regulären Funktion besteht nur aus isolierten Punkten (s. § 3, 3), außer wenn überall $f(z) = a$ ist.

gesehen — die Ableitungen der Funktionen in z_0, also nach Voraussetzung einander gleich. Nach dem Identitätssatze sind dann die Funktionen überall in $\mathfrak{G}$ einander gleich.

Satz 4. *Besitzt die (nicht konstante) Funktion $f(z)$ in dem regulären Punkte z_0 eine a-Stelle, so gibt es stets eine bestimmte positive ganze Zahl α, so daß*

$$f_1(z) = \frac{f(z) - a}{(z - z_0)^\alpha}$$

für die von z_0 verschiedenen Punkte einer Umgebung von z_0 in eine Potenzreihe

$$f_1(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + \cdots$$

entwickelbar ist, deren erster Koeffizient von 0 verschieden ist.

Beweis. In der Entwicklung $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ von $f(z)$ an der Stelle z_0 ist $a_0 = a$ und mindestens einer der folgenden Koeffizienten von 0 verschieden. Ist a_α der erste dieser Art, so ist

$$f(z) - a = a_\alpha(z - z_0)^\alpha + a_{\alpha+1}(z - z_0)^{\alpha+1} + \cdots, \quad (a_\alpha \neq 0),$$

woraus die Behauptung abgelesen werden kann. — Es ist natürlich $b_0 = a_\alpha$ und allgemein $b_\nu = a_{\alpha+\nu}$, $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$. Man nennt α die **Ordnung** der a-Stelle z_0. Jeder Stelle kommt also eine ganz bestimmte (positiv-ganzzahlige) Ordnung zu[1]).

Aufgaben. 1. Liegt der geschlossene, doppelpunktfreie Weg $\mathfrak{C}$ und sein Innengebiet in einem Regularitätsgebiete einer nicht konstanten Funktion $f(z)$, so umschließt er nur endlich viele Nullstellen (allgemeiner: a-Stellen) von $f(z)$.

2. Die Funktion $\sin(1/(1 - z))$ ist im Innern des Einheitskreises regulär und besitzt dort die unendlich vielen aus $1/(1 - z) = k\pi$ sich ergebenden Nullstellen $1 - 1/(k\pi)$, $(k = 1, 2, \ldots)$. Liegt hierin ein Widerspruch gegen Satz 1 oder Aufgabe 1? Man präzisiere den Sachverhalt.

---

[1]) Ist $f(z)$ in z_0 regulär und $f(z) \neq a$, so ist es oft bequem, die Stelle z_0 als eine a-Stelle der Ordnung 0 zu bezeichnen. Eine Nullstelle 0-ter Ordnung ist hiernach eine reguläre Stelle, an der die Funktion von 0 verschieden ist.

3. Im Anschluß an § 20, Satz 4 zeige man: In z_0 kann $|f(z)|$ auch kein von 0 verschiedenes Minimum, und $\Re(f(z))$ sowie $\Im(f(z))$ können dort weder ein Maximum noch ein Minimum besitzen.

8. Kapitel

Analytische Fortsetzung und vollständige Definition der analytischen Funktion

§ 22. Das Prinzip der analytischen Fortsetzung

Die Betrachtungen des letzten Kapitels gipfelten in dem Identitätssatze für analytische Funktionen: wenn zwei solche Funktionen in der Umgebung eines Punktes (oder auch nur längs eines kleinen Wegstückchens oder auch nur in gewissen unendlichen Punktmengen) übereinstimmen, so sind sie völlig identisch.

Dies bedeutet aber, wie schon S. 87—89 angedeutet, eine stärkste innere Gebundenheit für die Funktion: durch ihre Werte in jenen Punktmengen ist eine Funktion schon vollständig (d. h. ihr ganzer Wertevorrat mit allen seinen Eigenschaften) bestimmt.

Es wird sich jetzt darum handeln, die hierin steckende Eigenschaft analytischer Funktionen noch klarer herauszuarbeiten.

Wir denken uns dazu zwei Funktionen $f_1(z)$ und $f_2(z)$ gegeben, deren erste in einem Gebiete $\mathfrak{G}_1$ und deren zweite in einem Gebiete $\mathfrak{G}_2$ regulär ist. Wir nehmen weiter an, daß $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ ein gewisses (wenn auch noch so kleines) Gebiet $\mathfrak{g}$, aber auch nur dieses, gemeinsam haben (vgl. Fig. 6, wo $\mathfrak{g}$ schraffiert ist) und endlich, daß in $\mathfrak{g}$ stets $f_1(z) = f_2(z)$ ist.

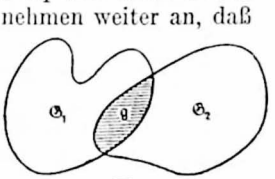

Fig. 6

Dann gilt auch bei dieser Sachlage: die Funktionen f_1 und f_2 bestimmen sich gegenseitig in völlig eindeutiger Weise. In der Tat gibt es nach dem Identitätssatze neben $f_1(z)$ keine

andere Funktion, die in $\mathfrak{G}_1$ regulär wäre und in $\mathfrak{g}$ dieselben Werte hätte.

Durch diese Werte in $\mathfrak{g}$ (also doch eben: durch $f_2(z)$) ist $f_1(z)$ völlig bestimmt; und ebenso ist $f_2(z)$ durch $f_1(z)$ vollständig mitbestimmt.

Wir können also sagen: Haben zwei Gebiete $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ die eben beschriebene Lage und ist in $\mathfrak{G}_1$ eine reguläre Funktion $f_1(z)$ gegeben, so gibt es entweder überhaupt keine oder genau eine Funktion, die in $\mathfrak{G}_2$ regulär ist und in $\mathfrak{g}$ mit $f_1(z)$ übereinstimmt.

Ist eine solche Funktion $f_2(z)$ vorhanden, so sagt man, die in $\mathfrak{G}_1$ gegebene Funktion $f_1(z)$ sei über $\mathfrak{G}_1$ hinaus in das Gebiet $\mathfrak{G}_2$ hinein fortsetzbar; und hat man die Funktion $f_2(z)$ ermittelt, so sagt man, man habe $f_1(z)$ in das Gebiet $\mathfrak{G}_2$ hinein analytisch fortgesetzt. Genau ebenso ist aber $f_1(z)$ die analytische Fortsetzung von $f_2(z)$ in das Gebiet $\mathfrak{G}_1$ hinein. Man hat überhaupt kein Recht mehr, $f_1(z)$ und $f_2(z)$ als verschiedene Funktionen anzusehen. Wegen der völligen Gegebenheit der einen durch die andere muß man vielmehr beide als Teildarstellungen oder „Elemente" ein und derselben Funktion $F(z)$ ansehen, die in dem aus $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ gebildeten Gesamtgebiete regulär ist.

Ein Beispiel soll dies noch deutlicher machen: $\mathfrak{G}_1$ sei der Einheitskreis $|z|<1$, $\mathfrak{G}_2$ der Kreis mit $\sqrt{2}$ um i, also der Kreis $|z-i|<\sqrt{2}$; beide haben ersichtlich (der Leser mache sich eine Skizze) ein Gebiet $\mathfrak{g}$ gemeinsam. In $\mathfrak{G}_1$ sei $f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ gegeben. Gibt es eine in $\mathfrak{G}_2$ reguläre Funktion, die in $\mathfrak{g}$ mit $f_1(z)$ übereinstimmt? Wenn es eine solche Funktion gibt, so kann es jedenfalls nur eine einzige geben. Hier leistet $f_2(z)=\frac{1}{1-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^n$ das Verlangte; denn diese Reihe ist für $\left|\frac{z-i}{1-i}\right|<1$, d. h. für $|z-i|<\sqrt{2}$ konvergent, und die Werte

beider Potenzreihen lassen sich in $\mathfrak{g}$ sofort als gleich erkennen, da man ja die Summen beider geometrischen Reihen in ihren Konvergenzkreisen geschlossen angeben und daher vergleichen kann. (Man erhält in $\mathfrak{g}$ beidemal $1/(1-z)$.)

$f_1(z)$ und $f_2(z)$ sind also analytische Fortsetzungen voneinander, beide sind Elemente ein und derselben Funktion $F(z)$, die (mindestens) in dem aus $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ gebildeten Gesamtgebiete $\mathfrak{G}$ regulär ist.

Bei diesem einfachen Beispiele sind wir sogar in der Lage, die Funktion $F(z)$ explizite anzugeben; es ist ja $F(z) = 1/(1-z)$. Im allgemeinen aber ist dies durchaus nicht möglich. Vielmehr ist $F(z)$ im allgemeinen nicht anders rechnerisch realisierbar, als durch seine Teildarstellungen oder Elemente. Trotzdem ist $F(z)$ nach § 5 als eine Funktion anzusprechen, indem die verschiedenen Teildarstellungen zusammen die Zuordnungsvorschrift liefern, durch die die Funktion $F(z)$ gegeben ist.

Wir fassen das Ergebnis, das man als das **Prinzip der analytischen Fortsetzung** bezeichnet, zu dem folgenden Satz zusammen:

Satz 1. *In einem Gebiete $\mathfrak{G}_1$ sei eine reguläre Funktion $f_1(z)$ gegeben, und es sei $\mathfrak{G}_2$ ein anderes Gebiet, das mit $\mathfrak{G}_1$ ein gewisses Teilgebiet $\mathfrak{g}$, aber auch nur dieses, gemeinsam hat. Wenn es dann eine in $\mathfrak{G}_2$ reguläre Funktion $f_2(z)$ gibt, die in $\mathfrak{g}$ mit $f_1(z)$ übereinstimmt, so kann es nur eine einzige geben. $f_1(z)$ und $f_2(z)$ heißen analytische Fortsetzungen voneinander; sie gelten als Teildarstellungen oder Elemente einer und derselben durch sie bestimmten und im Gesamtgebiet regulären Funktion $F(z)$.*

Hieran schließen sich nun sofort die folgenden Fragen:

1. Wenn in einem ersten Gebiete $\mathfrak{G}_1$ eine dort reguläre Funktion gegeben ist (z. B. in ihrem Konvergenzkreise eine Potenzreihe), wie erkennt man, ob sich $f_1(z)$ in dem eben erklärten Sinne in ein Gebiet $\mathfrak{G}_2$ hinein fortsetzen läßt, und wie findet man die Fortsetzung $f_2(z)$? — Sodann:

2. Gibt es noch weitere Gebiete $\mathfrak{G}_3, \mathfrak{G}_4, \ldots$, die mit einem der früheren in derselben Art je ein Stück gemeinsam haben, und gibt es in ihnen reguläre Funktionen $f_3(z), f_4(z), \ldots$, die in dem erklärten Sinne Fortsetzungen einer der vorangehenden bilden?

Wenn ja, so wären alle diese Funktionen durch $f_1(z)$ völlig eindeutig bestimmt, wären also sämtlich als Elemente ein und derselben Funktion anzusehen. — Und so erhebt sich noch die Frage:

3. Wie findet man, wenn ein Funktionselement gegeben ist, alle überhaupt möglichen weiteren Elemente, also alle Fortsetzungen in anschließende Gebiete?

Dieses sehr umfassende und scheinbar sehr schwierige Problem läßt eine — wenigstens theoretisch — sehr einfache Lösung zu.

Ehe wir diese in § 24 geben, wollen wir die analytische Fortsetzung noch von einer etwas anderen Seite her betrachten.

Im vorangehenden haben wir von dem Entwicklungssatze die Tatsache benutzt, daß eine analytische Funktion durch ihre Werte in einem kleinen Teilgebiete schon bestimmt ist. Es genügte sogar schon, die Werte längs eines kleinen Wegstückes zu kennen.

Wir denken uns demgemäß in der Ebene ein Wegstück $\mathfrak{k}$ gegeben und jedem Punkte z desselben einen Funktionswert $\varphi(z)$ zugeordnet. Zeichnen wir dann irgendein Gebiet $\mathfrak{G}$, welches $\mathfrak{k}$ enthält, so stehen wir vor der Alternative: entweder es gibt überhaupt keine in $\mathfrak{G}$ reguläre Funktion $f(z)$, die längs $\mathfrak{k}$ mit $\varphi(z)$ übereinstimmt oder es gibt genau eine, und diese ist dann also durch die Werte von $\varphi(z)$ längs $\mathfrak{k}$ eindeutig bestimmt.

Wir sagen auch in diesem Falle, wir hätten die längs $\mathfrak{k}$ gegebene Funktion in das Gebiet $\mathfrak{G}$ hinein analytisch fortgesetzt.

Ist insbesondere $\mathfrak{k}$ ein Stück der reellen Achse, etwa das Intervall $x_0 \leqq x \leqq X$, und werden die seinen Punkten x zugeordneten Funktionswerte (die nicht reell zu sein brauchen) mit $\varphi(x)$ bezeichnet, so handelt es sich um die analytische Fortsetzung einer (reell- oder komplexwertigen) Funktion der reellen Veränderlichen x. Ist sie gelungen, so sagt man wohl auch, man habe $\varphi(x)$ „ins Komplexe" fortgesetzt, und wir können hierüber folgenden Satz aussprechen:

Satz 2. *Wenn eine Funktion der reellen Veränderlichen x überhaupt ins Komplexe analytisch fortsetzbar ist, so ist dies nur auf eine einzige Art möglich.*

Folgende Bemerkung hierzu wird die starke innere Gebundenheit einer analytischen Funktion noch in ein helleres Licht setzen:

$\mathfrak{k}$ sei etwa die reelle Strecke $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$, der Einheitskreis das sie enthaltende Gebiet $\mathfrak{G}$, und es sei $\varphi(x)$ auf $\mathfrak{k}$ definiert. Betrachtet man nun $\varphi(x)$ nur auf der halben Strecke $0 \leqq x \leqq \frac{1}{4}$, so ist durch diese Funktionswerte nach obigem Satze schon entschieden, ob $\varphi(x)$ in den Einheitskreis fortsetzbar ist oder nicht. Und im ersten Falle sind die Werte $\varphi(x)$ auf der anderen Hälfte der Strecke, also in $\frac{1}{4} < x \leqq \frac{1}{2}$, schon durch die auf der ersten Hälfte mitbestimmt. Man hat also bei der Wahl der Funktionswerte von $\varphi(x)$ auf der zweiten Hälfte gar keine Freiheit mehr, wenn man nicht die Fortsetzbarkeit überhaupt unmöglich machen will. Auf die erste Hälfte $0 \leqq x \leqq \frac{1}{4}$ kann man nun erneut dieselbe Erwägung anwenden usw. Kurz, die Freiheit in der Wahl der Werte von $\varphi(x)$ ist — wenn nicht geradezu illusorisch — so doch gewiß nur auf endlich viele Punkte beschränkt, indem nach dem Identitätssatz durch die Werte in unendlich vielen Punkten über die Möglichkeit der Fortsetzung schon entschieden ist.

Aufgabe: Die reelle Funktion $F(x)$ sei für alle reellen x gleich dem nicht negativen Wert $\sqrt{x^2}$. □

Ist diese Funktion ins Komplexe fortsetzbar?

§ 23. Die elementaren Funktionen

Im Anschluß an den letzten Satz kann man nun die bekannteren Funktionen einer reellen Veränderlichen x daraufhin durchgehen, ob sie ins Komplexe fortsetzbar sind oder

nicht, und untersuchen, wie im ersten Falle die die Fortsetzung liefernde analytische Funktion beschaffen ist.

1. Die rationalen Funktionen. — Ist

$$\varphi(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_k x^k}$$

(die a_ν und b_ν komplex)

eine rationale Funktion, so erkennt man unmittelbar, daß $\varphi(x)$ fortsetzbar ist und daß

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_k z^k}$$

die sie ins Komplexe fortsetzende Funktion ist. $f(z)$ ist in der ganzen z-Ebene regulär mit möglicher Ausnahme der Punkte, in denen der Nenner 0 ist. (In § 28, Satz 3 wird bewiesen werden, daß dies höchstens k Punkte sind.)

2. e^z, $\sin z$, $\cos z$. — Die Potenz e^x und die trigonometrischen Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ können für reelle x durch die Reihen

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

erklärt werden. Ersetzt man hierin rein formal x durch z, so entstehen die Reihen

$$f_1(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

$$f_2(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$f_3(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!},$$

die wegen ihrer Form als Potenzreihen (mit $z_0 = 0$, $r = \infty$) je eine in der ganzen z-Ebene reguläre Funktion darstellen. Da sie für $z = x$ mit e^x bzw. $\sin x$ und $\cos x$ übereinstimmen, so sind sie die Fortsetzungen dieser Funktionen ins Komplexe. $f_1(z)$ wird darum die Exponentialfunktion genannt und mit e^z oder $\exp z$ bezeichnet; ebenso werden für $f_2(z)$ und $f_3(z)$ die Bezeichnungen $\sin z$ und $\cos z$ benutzt. — Die Eigenschaften dieser analytischen Funktionen sollen im folgenden als bekannt angesehen werden (s. Elem., 12. Kap.). Der Leser erkennt nun aber aus den Entwicklungen dieses Kapitels, daß in der ihm aus den Elem. her bekannten scheinbar willkürlichen Definition von e^z, $\sin z$ und $\cos z$ für komplexe Argumente ein absoluter Zwang liegt: sie können als reguläre Funktionen von z nur so definiert werden, wie es soeben geschehen ist.

3. Die Fortsetzungen der Funktionen $\log x$, a^x, $\sqrt[m]{x}$ u. a. sollen erst untersucht werden, nachdem wir im folgenden Paragraphen den Begriff der analytischen Funktion vollständig werden aufgestellt haben.

§ 24. Fortsetzung durch Potenzreihen und vollständige Definition der analytischen Funktion

Wir gehen nun an die Beantwortung der in § 22 aufgeworfenen Fragen 1 bis 3, die sich bei allen durch dasselbe Verfahren wird erledigen lassen.

Es sei also in $\mathfrak{G}_1$ eine dort reguläre Funktion $f_1(z)$ gegeben. Ist dann z_1 irgendein Punkt aus $\mathfrak{G}_1$, so kann man um ihn als Mittelpunkt die Funktion in eine Potenzreihe entwickeln:

$$(1) \qquad f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} (z - z_1)^n .$$

Jetzt können zwei verschiedene Fälle eintreten: Der Radius dieser Reihe ist entweder $+\infty$, oder er hat einen endlichen positiven Wert.

Ist ihr Radius $r_1 = +\infty$, d. h. die Reihe für jedes z (oder: beständig) konvergent, so hat man schon die Antwort auf jede der Fragen: Es gibt eine Funktion, die die Fortsetzung von $f_1(z)$ über $\mathfrak{G}_1$ hinaus leistet; diese ist in der ganzen Ebene regulär, und es kann daher keine andere irgendwo reguläre Funktion aus $f_1(z)$ durch Fortsetzung erhalten werden als die durch jene beständig konvergente Potenzreihe definierte.

Beispiel: Es sei

$$g(z) = 1 - \frac{z^2}{2} - \frac{2}{3!}z^3 - \cdots - \frac{n-1}{n!}z^n - \cdots = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{n!}z^n$$

(diese Reihe ist beständig konvergent),

$$h(z) = 1 + z + z^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

(diese Reihe konvergiert nur für $|z| < 1$), und es werde im Einheitskreise

$$f_1(z) = g(z) \cdot h(z)$$

gesetzt. Außerhalb des Einheitskreises sind durch diese Formel keinerlei Funktionswerte definiert. Entwickelt man nun um $z_1 = 0$ als Mittelpunkt, so findet man durch Ausmultiplizieren der Potenzreihen[1]):

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

womit eine für die ganze Ebene gültige Entwicklung der Funktion gewonnen ist.

Hat der Radius r_1 der Entwicklung (1) einen endlichen positiven Wert, so wähle man einen vom Mittelpunkt verschiedenen Punkt z_2 im Innern des Konvergenzkreises. Dann kann man die für z_2 als Mittelpunkt gültige Entwicklung ansetzen:

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} (z - z_2)^n$, für die $a_n^{(2)} = \frac{1}{n!} f_1^{(n)}(z_2)$ ist.

Sie kann also nach § 19, Satz 5 direkt aus (1) erhalten werden.

[1]) Es ist $1 - \frac{1}{2!} - \frac{2}{3!} - \cdots - \frac{k-1}{k!} = \frac{1}{k!}$, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Für den Radius r_2 der Entwicklung gilt ersichtlich

$$r_2 \geqq r_1 - |z_2 - z_1| \tag{3}$$

(d. h. er ist mindestens gleich dem Abstand des Punktes z_2 von der Peripherie des ersten Kreises).

Gilt hier das untere Zeichen (s. Fig. 7a), so liefert (2) den Wert der Funktion nur in solchen Punkten, in denen er auch schon durch (1) geliefert wurde. Die Entwicklung (2) lehrt uns dann unmittelbar nichts Neues. Sie lehrt aber dies, daß

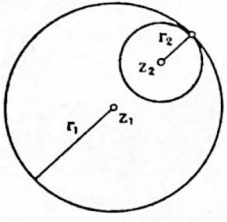

Fig. 7a

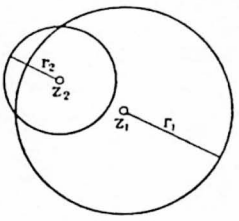

Fig. 7b

der Berührungspunkt ζ beider Kreise sicher nicht dem ersten Konvergenzkreise als regulärer Punkt eingegliedert werden kann, daß es also (vgl. die Bemerkung in § 20, S. 84) auf keine Weise möglich ist, diesen Punkt ζ und eine Umgebung desselben in denjenigen ihrer Punkte, die auf dem Rande oder außerhalb des Konvergenzkreises liegen, so mit Funktionswerten zu belegen, daß eine in dem erweiterten Gebiete reguläre Funktion entsteht. Eine solche Stelle ζ nennt man eine für Annäherung aus dem Innern des Konvergenzkreises[1]) singuläre Stelle auf dem Rande des Konvergenzkreises; über sie hinweg ist eine Fortsetzung der Funktion nicht möglich. Sie lehrt dann also, daß ζ ein solch singulärer Punkt für die Funktion $f_1(z)$ ist. Gilt aber das obere Zeichen (s. Fig. 7b), so ragt der neue Konvergenzkreis über den alten hinaus: Man hat alsdann die Funktion $f_1(z)$

[1]) Dieser Zusatz ist notwendig, um die oben festgestellte Art von singulären Punkten von anderen Arten zu unterscheiden, auf die später eingegangen wird.

in der Richtung des Radius $z_1 \ldots z_2$ über den Randpunkt ζ des alten Konvergenzkreises hinaus fortgesetzt.

Wenn also über einen Randpunkt ζ des ersten Konvergenzkreises hinaus überhaupt eine Fortsetzung möglich ist, so ist sie mit Hilfe dieser einfachen Potenzreihen-Entwicklungen möglich.

Man denke sich nun das erste Funktionselement nach allen möglichen Richtungen fortgesetzt; und ebenso denke man sich die neuen Elemente von den neu gewonnenen Bereichen aus nach allen möglichen Richtungen fortgesetzt. Dann wächst aus dem ersten Element eine Funktion hervor, die in einem immer größeren Bereiche regulär ist.

Hierbei sind die folgenden Umstände zu beachten:

1. Die Fortsetzung der ersten Potenzreihe kann nach keiner Richtung hin möglich sein. Dann gibt es also keine Funktion, die in einem größeren Gebiete als dem ersten Konvergenzkreise regulär wäre. Man sagt: die Funktion sei *nicht fortsetzbar*, der Konvergenzkreis sei ihre *natürliche Grenze*.

Beispiel. $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!} = z + z^2 + z^6 + \cdots + z^{n!} + \cdots$ mit $r = 1$. Wäre diese Funktion $f(z)$ über den Einheitskreis fortsetzbar, so bestünde ein gewisser Bogen seiner Peripherie nur aus regulären Punkten. Auf jedem solchen Bogen liegen aber (sogar unendlich viele) Punkte der Form $z_0 = \exp(2\pi i p/q)$ mit positiv-ganzen p und q. Zeigt man also, daß kein Punkt dieser Form z_0 auch nur Stetigkeitspunkt für $f(z)$ sein kann, so ist die Nichtfortsetzbarkeit von $f(z)$ bewiesen. Nun ist aber für $z = \varrho z_0$ mit $0 < \varrho < 1$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{q-1} z^{n!} + \sum_{n=q}^{\infty} \varrho^{n!};$$

denn für $n \geqq q$ ist $z^{n!} = \varrho^{n!}$. Ist also g eine beliebige große positive ganze Zahl, so ist für $m = 2q + g$

$$|f(z)| > \sum_{n=q}^{m} \varrho^{n!} - \sum_{n=1}^{q-1} |z|^{n!} > (m - q + 1)\,\varrho^{m!} - (q - 1).$$

Für $\varrho \to 1$ strebt die rechte Seite gegen $m - 2q + 2 = g + 2$, so daß bei geeigneter Wahl von ϱ_0 für alle $\varrho_0 < \varrho < 1$ notwendig

$|f(z)| > g$ sein muß. Da g beliebig war, so besagt dies: Bei radialer Annäherung an z_0 wächst $|f(z)|$ über alle Grenzen; z_0 kann also kein Stetigkeitspunkt sein, w. z. b. w.

2. Der andere extreme Fall, daß die Potenzreihe nach allen Seiten hin über den Konvergenzkreis hinaus fortsetzbar wäre, kann nicht eintreten. Denn es gilt hier der wichtige

Satz 1. *Auf dem Rande des Konvergenzkreises einer Potenzreihe liegt für die durch sie definierte Funktion mindestens eine singuläre Stelle der oben genannten Art.*

Beweis. Die Behauptung besagt, daß, wenn r_1 der (wahre) Konvergenzradius von (1) ist, auf dem Rande des Konvergenzkreises mindestens eine Stelle ζ liegt, über die hinaus nicht fortgesetzt werden kann. Wir zeigen dies, indem wir beweisen: Wenn über jeden Randpunkt ζ des Kreises $\mathfrak{K}$: $|z - z_1| = r_1$ hinaus fortgesetzt werden kann, so ist r_1 nicht der wahre Konvergenzradius von (1).

Wenn nämlich über jeden Randpunkt ζ von $\mathfrak{K}$ fortgesetzt werden kann, so gibt es auch um jeden einen Kreis $\mathfrak{K}_\zeta$ (sein Radius heiße ϱ_ζ), in den hinein $f_1(z)$ fortgesetzt werden kann. Die Belegung dieser Kreise mit Funktionswerten kann sich gegenseitig nicht stören, d. h. wenn zwei dieser Kreise ein gemeinsames Stück haben, so müssen die Werte der Fortsetzungen von $f_1(z)$ in diese Kreise hinein in dem gemeinsamen Teil nach dem Identitätssatz übereinstimmen, da dieser gemeinsame Teil seinerseits zu einem Teile in $\mathfrak{K}$ liegt, wo die Belegungen ja gewiß dieselben sind. Nach dem Heine-Borelschen Satz genügen nun endlich viele der Kreise $\mathfrak{K}_\zeta$, um den ganzen Rand von $\mathfrak{K}$ zu überdecken. Diese endlich vielen Kreise $\mathfrak{K}_\zeta$ bedecken aber (zusammen mit $\mathfrak{K}$) ein Kreisgebiet um z_1, dessen Radius $r > r_1$ ist. Nach dem Entwicklungssatz muß dann (1) mindestens in diesem größeren Kreise konvergieren, d. h. r_1 ist nicht der wahre Konvergenzradius, w. z. b. w.

3. Man sagt, daß man ein (etwa in Gestalt der Potenzreihe $\sum a_n(z - z_0)^n$ gegebenes) Funktionselement längs eines

Weges $\mathfrak{k}$ fortsetzt, wenn der Weg in z_0 beginnt und man nun die neuen Mittelpunkte immer auf diesem Wege, genauer auf dem Stück des Weges wählt, das zwischen dem zuletzt benutzten Mittelpunkt und seinem ersten Treffpunkt mit dem Rande des zugehörigen Konvergenzkreises liegt.

Dabei kann es vorkommen, daß man mit der benutzten Kreiskette jeden vor einem gewissen Punkte ζ gelegenen Punkt des Weges nach endlich vielen Schritten in das Innere eines der Konvergenzkreise einfängt, ζ selbst aber nicht. Dann heißt ζ ein für die Fortsetzung längs $\mathfrak{k}$ singulärer Punkt der betrachteten Funktion.

Denkt man sich so ein gegebenes Element längs aller möglichen Wege fortgesetzt, so werden alle betroffenen Punkte von selbst in zwei Klassen eingeteilt: die regulären und die singulären, d. h. in die, die (bei gewissen Wegen) in das Innere eines neuen Konvergenzkreises einbezogen werden können, und die, bei denen dies nicht möglich ist. Jedem sich auf einem bestimmten Wege als regulär erweisenden Punkte z wird ein bestimmter Funktionswert w zugeordnet.

Hiernach kann man, vorbehaltlich weiterer Erläuterungen, etwa sagen:

Erklärung. *Unter der durch ein gegebenes Funktionselement definierten (vollständigen) analytischen Funktion versteht man die Gesamtheit der bei dem beschriebenen Fortsetzungsverfahren sich als regulär erweisenden Punkte, ein jeder belegt mit dem ihm zugeordneten Funktionswert.*

Die Gesamtheit der regulären Punkte z nennt man das Existenz- oder das Regularitätsgebiet dieser analytischen Funktion, die Gesamtheit der zugeordneten Werte w ihren Wertevorrat.

Im Hinblick auf das allmähliche Hervorwachsen der analytischen Funktion aus einem Elemente spricht man auch von dem analytischen Gebilde, das also alle regulären z, jedes mit dem ihm zugeordneten Funktionswerte w behaftet,

umfaßt. Die analytische Funktion ist recht eigentlich das innere Band, das jedes z mit seinem w verbindet.

Diese nun ziemlich vollständige Erklärung enthält dennoch einige Lücken:

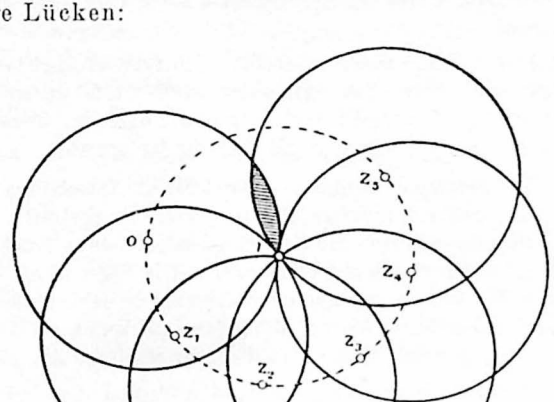

Fig. 8

a) Es werden noch Festsetzungen zu treffen sein, um das Verhalten einer Funktion im Unendlichen bezeichnen zu können. Das ist einfach und wird in § 32 geschehen.

b) Es kann sich folgender Umstand ereignen:

Wenn man nach mehrmaligem Fortsetzen mit dem neuen Kreis wieder in den ersten hineinragt — in Fig. 8 ragt der fünfte der neuen Kreise wieder in den ursprünglichen mit dem schraffierten Segmente hinein[1]) —, so können durch die

[1]) Der Figur liegt die Annahme zugrunde, daß der ursprüngliche Konvergenzkreis der Einheitskreis ist, daß auf ihm und in seiner weiteren Umgebung $z = 1$ der einzige singuläre Punkt ist und daß die Fortsetzung längs des (gestrichelten) Kreises $|z - 1| = 1$ im positiven Sinne herum erfolgt.

neue Potenzreihe den wieder eingefangenen Punkten des alten Konvergenzkreises (ihr Gebiet ist in der Figur schraffiert) wieder die nämlichen Funktionswerte w zugeordnet werden, mit denen sie schon behaftet sind, — oder aber neue Funktionswerte.

Im ersten Falle nennt man die Funktion eindeutig (in dem Gebiete, durch das fortgesetzt worden ist), andernfalls mehrdeutig. Sie heißt schlechthin eindeutig, wenn sie sich bei keiner Fortsetzung als mehrdeutig erweist.

c) Es wäre sogar denkbar — und kann tatsächlich eintreten —, daß ein innerer (also regulärer) Punkt des ersten Konvergenzkreises sich bei der eben beschriebenen Rückkehr in diesen nunmehr als singulär erweist. Die Eigenschaft eines Punktes der Ebene, regulär oder singulär zu sein, kann also wie in 3. ausgeführt, davon abhängen, auf welchem Wege t oder durch welche Kette von Kreisen man an ihn herankommt.

Wegen einer genaueren Untersuchung der sich aus b) und c) ergebenden Konsequenzen muß auf den II. Teil dieser Funktionentheorie verwiesen werden[1]). Doch soll im nächsten Paragraphen ein Satz bewiesen werden, der besagt, daß unter gewissen besonders häufig auftretenden Bedingungen der unter b) beschriebene Umstand sicher nicht eintritt. Und im darauf folgenden sollen die beiden einfachsten Beispiele mehrdeutiger Funktionen kurz behandelt werden.

Aufgabe. Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ hat den Einheitskreis zum Konvergenzkreise. Man zeige durch Entwicklung in eine neue Potenzreihe mit $z_1 = \frac{1}{2}$ als Mittelpunkt, daß der Punkt 1 ein singulärer Punkt der durch die Reihe im Einheitskreise dargestellten Funktion ist. (Trotzdem ist die Reihe für $z = 1$ konvergent!!)

[1]) Funktionentheorie II, Anwendung und Weiterführung der allgemeinen Theorie (Sammlung Göschen Nr. 703), 8. u. 9. Auflage, Berlin 1955.

§ 25. Der Monodromiesatz

Satz. *Es sei* $\mathfrak{G}$ *ein einfach zusammenhängendes Gebiet und* $f_0(z) = \Sigma a_n (z - z_0)^n$ *ein in dem Punkte* z_0 *desselben reguläres Funktionselement. Wenn sich dann* $f_0(z)$ *von* z_0 *aus längs eines jeden in* $\mathfrak{G}$ *verlaufenden Weges fortsetzen läßt, so erzeugt die Fortsetzung eine in dem ganzen Gebiete* $\mathfrak{G}$ *eindeutige und reguläre Funktion.*

Zum Beweise bemerken wir vorweg, daß jedes durch Fortsetzung gewonnene Element — wir benutzen dabei nur Potenzreihen — mindestens in dem größten Kreise um seinen Mittelpunkt konvergiert, der nicht aus $\mathfrak{G}$ heraustritt. Denn auf seinem Rande liegt ja mindestens ein singulärer Punkt, der die Fortsetzung hindert. Ein solches Hindernis soll aber nach Voraussetzung im Innern von $\mathfrak{G}$ nirgends vorhanden sein. — Wir haben nun offenbar nur zu zeigen:

Wenn man $f_0(z)$ von z_0 längs zweier verschiedener (in $\mathfrak{G}$ liegender) Wege $\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{k}_2$ nach z_1 fortsetzt, so erhält man in z_1 beide Male dasselbe Element $f_1(z) = \Sigma b_n (z - z_1)^n$. Da nun, kurz gesagt, der Fortsetzungsprozeß vorwärts und rückwärts völlig eindeutig verläuft[1]), so kann man auch sagen: Wenn man $f_0(z)$ längs $\mathfrak{k}_1$ von z_0 nach z_1 fortsetzt und das dort erhaltene Element $f_1(z)$ längs $\mathfrak{k}_2$ zurück nach z_0 fortsetzt, so erhält man in z_0 wieder das Ausgangselement $f_0(z)$. Es genügt also zu zeigen, daß die Fortsetzung eines Elementes längs eines geschlossenen Weges zu diesem Element zurückführt. Dies beweisen wir indirekt, indem wir zeigen: Wenn die Fortsetzung eines Elementes längs eines in $\mathfrak{G}$ liegenden geschlossenen Weges $\mathfrak{C}$ nicht zu diesem Element zurückführt, so steht dies im Widerspruch zu der Voraussetzung, daß unsere Fortsetzungen längs jedes Weges in $\mathfrak{G}$ möglich

[1]) Man hat sich nur die aufeinanderfolgenden Mittelpunkte so gewählt zu denken, daß jeder im Konvergenzkreis um den vorangehenden und um den nachfolgenden gelegen ist.

sein sollen. Bei der Fortsetzung längs $\mathfrak{C}$, etwa von ζ_0 im positiven Sinne zurück nach ζ_0, werden nun endlich viele Mittelpunkte $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_m$ auf dem Wege benötigt. Jeder liegt im Konvergenzkreis um den vorangehenden und nachfolgenden, wenn wir ihre Abstände kleiner gemacht haben als den Abstand des Weges $\mathfrak{C}$ vom Rande des Gebietes. Ersetzt man daher $\mathfrak{C}$ durch das Polygon $\mathfrak{p}$ mit den Ecken $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_m$, so sind die Fortsetzungen längs $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{p}$ genau dieselben. Auch längs $\mathfrak{p}$ würden also die Fortsetzungen nicht zum Ausgangselement zurückführen.

Nun ist $\mathfrak{p}$ entweder einfach oder $\mathfrak{p}$ kann gemäß § 4, Hilfssatz 1, in einfache Teilpolygone und hin- und her durchlaufene Strecken zerlegt werden. Da die letzteren nicht stören, müßte auch schon der Umlauf um eines der einfachen Teilpolygone nicht zum Ausgangselement zurückführen[1]). Durch weitere Teilungen dieses Polygons (durch innere Diagonalen) müßte man schließlich zu einem Dreieck kommen, längs dessen die Fortsetzung nicht zum Ausgangselement zurückführt. Teilt man dieses Dreieck wie beim Beweis des Cauchyschen Integralsatzes (s. Fig. 1) weiter, so kommt man zu einer Folge ineinander geschachtelter und auf einen Punkt ζ von $\mathfrak{G}$ zusammenschrumpfender Dreiecke, längs deren die Fortsetzung nicht zum Ausgangselement zurückführt. Das kann aber nicht sein. Hat nämlich ζ den Abstand ϱ vom Rande des Gebietes, so muß die Fortsetzung um ein Dreieck jener Folge sicher zum Ausgangselement zurückführen, sobald dessen Durchmesser $< \frac{1}{2}\varrho$ ist. Denn das ganze Dreieck liegt ja dann im Innern des Konvergenzkreises eines jeden der dabei benötigten Funktionselemente. Damit ist der Monodromiesatz bewiesen.

---

[1]) Denn andernfalls würde auch der Gesamtumlauf zum Ausgangselement zurückführen.

§ 26. Beispiele mehrdeutiger Funktionen

Die wirkliche (rechnerische) Herstellung des ganzen analytischen Gebildes, also die Scheidung aller z in reguläre und singuläre und die Zuordnung der Funktionswerte zu den regulären z, wird auf die in § 24 angegebene Methode im allgemeinen nicht durchführbar sein. Ihr Wert besteht darin, zunächst einen Einblick in das Wesen der Sache zu bekommen; sie hat also lediglich den Charakter eines Existenzbeweises.

Die folgenden beiden Beispiele sollen zeigen, wie in den einzelnen Fällen ganz andere Mittel zum Ziele führen.

1. $\boldsymbol{w = f(z) = \log z.}$

Schon in § 14, 6 hatten wir gefunden, daß

$$f(z) = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} \tag{1}$$

eine in der rechten Halbebene reguläre analytische Funktion ist, falls auch der Integrationsweg auf diese Halbebene beschränkt bleibt. Da für $x > 0$ der natürliche Logarithmus durch

$$\log x = \int_1^x \frac{d\xi}{\xi}$$

definiert werden kann, so erkennt man sogleich, daß $f(z)$ die analytische Fortsetzung von $\log x$ ins Komplexe ist, da für $z = x > 0$ in der Tat $f(z) = \log x$ ist.

Welches ist der Existenzbereich von $f(z)$ und welches ihr Wertevorrat?

Das Integral (1) hat stets einen Sinn, wenn der Weg den Nullpunkt vermeidet. Ist also $z_1 \neq 0$ ein beliebiger Punkt der Ebene und $\mathfrak{k}_1$ ein beliebiger, zunächst fester Weg von 1 nach z_1, der den Nullpunkt vermeidet, so hat das Integral $\int_1^{z_1}_{\mathfrak{k}_1} \frac{d\zeta}{\zeta}$ einen eindeutigen, festen Wert. Das von z_1 bis zu einem beliebigen Punkt z einer Umgebung von z_1 (genauer: eines einfach zusammenhängenden Gebietes $\mathfrak{G}_1$, das z_1 aber nicht den Nullpunkt enthält) genommene Integral ist nach dem Cauchyschen Satze unabhängig vom Wege, wenn dieser Weg in $\mathfrak{G}_1$ verläuft. Das von 1 längs $\mathfrak{k}_1$ nach z_1 und

weiter längs irgendeines Weges in $\mathfrak{G}_1$ nach z genommene Integral definiert also (nach § 14, Satz 3) eine in $\mathfrak{G}_1$ reguläre Funktion $f_1(z)$. Wählt man statt des Weges $\mathfrak{k}_1$ einen andern Weg $\mathfrak{k}_1^*$ von 1 nach z_1, so unterscheidet sich die nun erhaltene und wieder in $\mathfrak{G}_1$ reguläre Funktion $f_1^*(z)$ von $f_1(z)$ höchstens um eine additive Konstante. Denn es ist ja

$$f_1^*(z) = f_1(z) - \int_1^{z_1}{}^{\mathfrak{k}_1} \frac{d\zeta}{\zeta} + \int_1^{z_1}{}^{\mathfrak{k}_1^*} \frac{d\zeta}{\zeta},$$

die unterscheidende Konstante ist also gleich dem längs des geschlossenen Weges $(\mathfrak{k}_1^* - \mathfrak{k}_1)$ genommenen Integral.

Längs jeden geschlossenen (den Nullpunkt vermeidenden) Weges $(\mathfrak{k}_1^* - \mathfrak{k}_1)$ hat aber unser Integral einen der Werte $2k\pi i$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Denn jeder solche von 1 ausgehende und dahin zurückkehrende geschlossene Weg ist, wie man sich auf Grund von § 4, Hilfssatz 1 leicht klar macht, nach dem Cauchyschen Satze gleichbedeutend mit einem Weg, der von 1 aus nach k-maliger Umlaufung des Einheitskreises $(k = 0, \pm 1, \ldots)$ nach 1 zurückkehrt (vgl. § 10, Beisp. 1).

Die so erhaltenen Funktionselemente sind nun sämtlich Fortsetzungen voneinander, insbesondere von der durch (1) gegebenen Funktion $f(z)$, wenn auch bei dieser z und der Integrationsweg auf eine einfach zusammenhängende Umgebung $\mathfrak{G}_0$ des Punktes 1 (z. B. auf die rechte Halbebene) beschränkt bleiben. Denn setzt man diese Funktion $f(z)$ längs des Weges $\mathfrak{k}_1$ in das Gebiet $\mathfrak{G}_1$ hinein analytisch fort, so erhält man offenbar die oben erklärte Funktion $f_1(z)$. Alle so erhaltenen Elemente $f_1(z)$ sind also Fortsetzungen ein und derselben Funktion $f(z)$, sind also, da der Fortsetzungsprozeß vorwärts und rückwärts völlig eindeutig verläuft (vgl. § 25), auch Fortsetzungen voneinander, sind somit Elemente einer einzigen analytischen Funktion $F(z)$. Sie soll weiterhin mit $\log z$ bezeichnet werden.

Diese ist aber nicht eindeutig. Denn ist der Weg $(\mathfrak{k}_1^* - \mathfrak{k}_1)$ in dem besprochenen Sinne mit dem k-mal umlaufenen Einheitskreis gleichbedeutend, so ist

$$f_1^*(z) = f_1(z) + 2k\pi i,$$

wo nun k durch passende Wahl der Wege jeden der Werte $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ erhalten kann. So erhält man z. B. für $\log(-1)$ jeden der Werte

$$\log(-1) = \pi i + 2k\pi i, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Wir können also sagen: Die Funktion $\log z$ ist in der ganzen Ebene mit Ausnahme des Nullpunktes regulär, sie ist aber unendlich vieldeutig, doch so, daß alle Werte von $\log z$ aus einem derselben durch Hinzufügung von beliebigen ganzzahligen Vielfachen von $2\pi i$ hervorgehen. Jeden dieser unendlich vielen Werte von $\log z$ nennt man eine Bestimmung des log im Punkte z. Für jedes einfach zusammenhängende, den Nullpunkt nicht enthaltende Gebiet $\mathfrak{G}_1$ lassen sich diese Bestimmungen zu unendlich vielen in $\mathfrak{G}_1$ eindeutigen und regulären Funktionen zusammenfassen, die man als Zweige der mehrdeutigen Funktion $\log z$ bezeichnet. Zwei verschiedene in $\mathfrak{G}_1$ reguläre Zweige unterscheiden sich nur um ein additiv hinzukommendes ganzzahliges Vielfache von $2\pi i$. Wählt man als $\mathfrak{G}_1$ die ganze Ebene ausschließlich der reellen Zahlen ≤ 0[1]), so nennt man den in ihr regulären Zweig, der in 1 den Wert 0 hat, den Hauptwert von $\log z$, alle übrigen Zweige dessen Nebenwerte. In § 20 hatten wir diesen Hauptwert für eine Umgebung von 1 in eine Potenzreihe entwickelt.

Auch von dieser Potenzreihe als zuerst gegebenem Funktionselement ausgehend, würde man nach den allgemeinen Methoden des vorigen Paragraphen dieselben Eigenschaften von $\log z$ — wenn auch nicht so bequem — entwickeln können. Insbesondere kann man so direkt zeigen, daß, wenn man die eben genannte Potenzreihe ähnlich dem in Fig. 8 skizzierten Verfahren im positiven Sinne einmal um den Nullpunkt herum fortsetzt (die neuen Mittelpunkte etwa stets auf dem Einheitskreise wählend), man nicht mit dem Hauptwert in den Ausgangskreis zurückkehrt, sondern daß sich die Funktionswerte um $2\pi i$ vermehrt haben.

Der Punkt 0 aber (und nur dieser) kann nicht innerer Punkt eines Regularitätsgebietes eines Zweiges von $\log z$ sein. Er wird darum als eine singuläre Stelle von $\log z$ bezeichnet und hier genauer als ein Verzweigungs- oder Windungspunkt; er ist unendlich vielblättrig oder von unendlich hoher Ordnung.

Die elementaren Eigenschaften der Funktion $\log z$ setzen wir als bekannt voraus (s. Elem., 13. Kap.) und betonen nur nochmals, daß die bei manchen Darstellungen ziemlich willkürlich erscheinende Vieldeutigkeit des $\log z$ eine wesentliche Eigenschaft dieser Funktion ist, die mit unbedingter Notwendigkeit auf Grund des Fortsetzungsprinzips aus jedem ihrer Elemente — mag man es geben, wie man will — hervorwächst.

[1]) Man nennt dies Gebiet die längs der negativ-reellen Achse „aufgeschnittene" Ebene.

Für jede der unendlich vielen Bestimmungen von $\log z$ ist

$$e^{\log z} \quad \text{oder}^{1}) \quad \exp(\log z) = z.$$

2. $$w = f(z) = \sqrt[m]{z} = z^{1/m}$$

Auch die reelle, für $x > 0$ definierte und dort positive Funktion $x^{1/m}$ ist ins Komplexe fortsetzbar. Denn mit $\log z$ ist auch

$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{m}\log z\right)$$

eine in der ganzen z-Ebene mit Ausnahme des Nullpunktes reguläre, wenn auch in der Umgebung des Nullpunktes nicht eindeutige Funktion. In jedem einfach-zusammenhängenden Gebiet $\mathfrak{G}$ aber, das den Nullpunkt nicht enthält, etwa in der längs der negativ-reellen Achse aufgeschnittenen Ebene $\mathfrak{G}_1$, ist (s. 1.) jeder Zweig von $\log z$ eine eindeutige reguläre Funktion. Da dies insbesondere von dem Hauptwert gilt, den wir nun mit $\operatorname{Log} z$ bezeichnen wollen, so ist die in $\mathfrak{G}_1$ reguläre Funktion

$$f_0(z) = \exp\left(\frac{1}{m}\operatorname{Log} z\right)$$

die gesuchte Fortsetzung der positiv-reellen Funktion $x^{1/m}$; denn es ist $f_0(x) = \exp\left(\frac{1}{m}\log x\right) = x^{1/m}$. Die Funktion $f(z)$ bezeichnen wir demgemäß mit $z^{1/m}$ oder $\sqrt[m]{z}$; $f_0(z)$ heißt der Hauptwert von $\sqrt[m]{z}$.

Nach dieser Definition erscheint die Funktion $z^{1/m}$ zunächst als unendlich-vieldeutig; sie ist indessen nur m-deutig. Denn alle Werte von $\log z$ sind in

$$\log z = \operatorname{Log} z + 2k\pi i, \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

enthalten, so daß

$$f(z) = z^{1/m} = \exp\left(\frac{1}{m}\operatorname{Log} z\right) \cdot \exp\frac{2k\pi i}{m} = \exp\frac{2k\pi i}{m} \cdot f_0(z)$$

ist. Der vor $f_0(z)$ stehende Faktor vermag aber nur m verschiedene Werte anzunehmen[2]), da zwei Werte von k, die sich nur um ein Vielfaches von m unterscheiden, ihm denselben Wert geben; und

[1]) An Stelle von e^z schreibt man häufig auch $\exp z$.

[2]) Es sind dies die m verschiedenen m-ten Einheitswurzeln, da ja $\left(\exp\frac{2k\pi i}{m}\right)^m = e^{2k\pi i} = 1$ ist.

die m Zweige von $z^{1/m}$ unterscheiden sich hiernach nur durch feste Faktoren von dem Hauptzweig. Wir lassen k die Werte $0, 1, 2, \ldots, m-1$ annehmen und erhalten demgemäß als Darstellungen der m Zweige:

$$f_k(z) = \exp \frac{2k\pi i}{m} \cdot \exp\left(\frac{1}{m} \operatorname{Log} z\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, m-1.$$

Es hat sich also ergeben:

1) $x^{1/m}$ ist ins Komplexe fortsetzbar.

2) Die dadurch eindeutig gekennzeichnete analytische Funktion $z^{1/m}$ ist in der ganzen Ebene außer in 0 regulär.

3) Sie ist jedoch m-deutig. Der Punkt 0 ist (vom Punkt ∞ abgesehen) der einzige und zwar m-blättrige[1]) Verzweigungspunkt. Bei analytischer Fortsetzung um ihn multipliziert sich die Funktion mit einer m-ten Einheitswurzel. Es ist stets $(z^{1/m})^m = z$.

Die elementaren Eigenschaften der Funktion $z^{1/m}$ sehen wir wieder als bekannt an (s. Elem., 11. Kap.), so daß wir uns mit diesen kurzen Ausführungen über ihre analytische Natur begnügen können.

Aufgaben. 1. Man entwickle den Hauptwert von $z^{1/m}$ für die Umgebung des Punktes 1 in eine Potenzreihe; speziell für $m = 2$.

2. Die allgemeine Potenz a^z, in der a eine beliebige komplexe Konstante ($\neq 0$ und $\neq 1$ und üblicherweise auch $\neq e$) bedeutet, wird durch die Festsetzung

$$a^z = e^{z \log a}$$

erklärt. Wo ist diese Funktion regulär? Ist sie eindeutig oder mehrdeutig? Kann hiernach a^z eindeutig sein? Was bedeutet i^i?

9. Kapitel. Ganze transzendente Funktionen

§ 27. Erklärungen

Nach den Entwicklungen des vorigen Kapitels erscheinen diejenigen Funktionen als die einfachsten, deren Potenzreihenentwicklung in der ganzen Ebene konvergiert; denn diese sind in der ganzen Ebene reguläre Funktionen und ihre Potenzreihenentwicklung, die wir nun in der Form

[1]) Man nennt ihn auch von der $(m-1)$-ten Ordnung, da für $m = 2$ offenbar die erste Stufe der Vieldeutigkeit auftritt.

$$w = f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

annehmen können, liefert für jedes z den zugehörigen Funktionswert. Diese Funktionen sind infolgedessen auch notwendigerweise eindeutig.

Man nennt sie kurz: **ganze Funktionen** — und unterscheidet sie in ganze transzendente und ganze rationale Funktionen, je nachdem von den Entwicklungskoeffizienten a_n unendlich viele oder nur endlich viele von 0 verschieden sind. Die letzteren nennt man auch Polynome (s. Elem., § 39). Ist in ihnen a_m der letzte von 0 verschiedene Koeffizient, so heißt m der Grad des Polynoms[1]).

Zu den ganzen transzendenten Funktionen gehören u. a. e^z oder $\exp z$, $\sin z$ und $\cos z$.

Die Sätze des folgenden Paragraphen sollen über das eigentümliche Verhalten dieser Funktionen belehren. — Hat $f(z)$ für alle z ein und denselben Wert c, so ist $f(z)$ zwar auch eine ganze Funktion (ein Polynom 0-ten Grades bzw. das Nullpolynom), stellt aber eine Degenerationsform derselben dar, für die die folgenden Sätze nicht gelten.

§ 28. Verhalten für große $|z|$

1. Wir beginnen mit dem sogenannten **Ersten Liouvilleschen Satz:**

Satz 1. *Eine (nicht konstante) ganze Funktion ist außerhalb jedes Kreises noch beliebig großer Werte fähig; d. h. wenn R und G beliebige (große) positive Zahlen sind, so gibt es Punkte z, für die*

$$|z| > R \text{ und } |f(z)| > G \text{ ist.}$$

Beweis. Wir beweisen den Satz in der gleichbedeutenden Form: *Eine beschränkte*[2]) *ganze Funktion reduziert sich not-*

[1]) Sind alle Koeffizienten = 0, so spricht man von dem Nullpolynom, dem man keinen bestimmten Grad gibt.

[2]) Eine Funktion heißt in einem Gebiete beschränkt, wenn ihr dortiger Wertevorrat eine beschränkte Zahlenmenge bildet.

wendig auf eine Konstante. In der Tat, gibt es eine Konstante M, so daß $|f(z)| \leqq M$ gilt für alle z, so folgt aus der Cauchyschen Abschätzungsformel $|a_n| \leqq M/\varrho^n$ sofort, daß für $n = 1, 2, \ldots$ notwendig $a_n = 0$ sein muß. Denn für ϱ darf jetzt jede beliebig große Zahl gesetzt werden. Also ist $f(z) \equiv a_0$.

2. Handelt es sich speziell um eine rationale ganze Funktion, so kann Satz 1 verschärft werden zu dem

Satz 2. *Ist $f(z)$ eine ganze rationale Funktion m-ten Grades ($m \geqq 1$) und G eine beliebige positive Zahl, so läßt sich R so angeben, daß für alle $|z| > R$ stets $|f(z)| > G$ ist.*

Beweis. Es ist

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m$$
$$= z^m \left[a_m + \frac{a_{m-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^m} \right],$$

also wenn $|z| = r$ gesetzt wird:

$$|f(z)| \geqq r^m \left[|a_m| - \frac{|a_{m-1}|}{r} - \cdots - \frac{|a_0|}{r^m} \right],$$

was, da $a_m \neq 0$, für alle hinreichend großen r größer als $\frac{1}{2}|a_m| r^m$, also $> G$, sogar $> G r^{m-1}$, ist.

3. Aus diesen Sätzen ergibt sich ein sehr einfacher Beweis für den Fundamentalsatz der klassischen Algebra (vgl. Elem., § 39):

Satz 3. *Ist $f(z)$ eine ganze rationale Funktion m-ten Grades ($m \geqq 1$), so hat die Gleichung $f(z) = 0$ mindestens eine Lösung.* Kürzer: *$f(z)$ besitzt Nullstellen.*

Beweis. Wäre stets $f(z) \neq 0$, so wäre auch $\frac{1}{f(z)} = g(z)$ eine ganze (nicht konstante) Funktion; also gäbe es nach dem Liouvilleschen Satz außerhalb jedes Kreises noch Punkte z, für die z. B.

$$|g(z)| > 1, \text{ also } |f(z)| < 1$$

wäre — im Widerspruch zu dem eben bewiesenen Satz 2.

(Eine ganze transzendente Funktion braucht keine Nullstellen zu besitzen; z. B. e^z ist eine ganze Funktion ohne Nullstellen.)

4. Handelt es sich dagegen bei dem Liouvilleschen Satze um eine transzendente ganze Funktion, so kann er verschärft werden zum

Satz 4. *Ist $f(z)$ eine ganze transzendente Funktion und sind die Zahlen $G > 0$, $R > 0$ und $m > 0$ beliebig gegeben, so gibt es stets Punkte z, für die*

$$|z| > R \text{ und } |f(z)| > G \cdot |z|^m$$

ist; d. h. $f(z)$ wird in gewissen Punkten z außerhalb jedes Kreises größer als jede (noch so große) Potenz von $|z|$.

Beweis. Auch diesen Satz beweisen wir wie den Satz 1 in der gleichbedeutenden Form: Ist $f(z)$ eine ganze Funktion und gibt es zwei positive Konstanten M und m, so daß für alle z

$$|f(z)| \leqq M |z|^m$$

ist, so ist $f(z)$ eine ganze rationale Funktion eines Grades $\leqq m$. In der Tat gilt jetzt die Abschätzung $|a_n| \leqq M \varrho^{-n+m}$ für alle ϱ. Also muß $a_n = 0$ sein für $n > m$.

5. Aus allen diesen Sätzen ergibt sich nun der merkwürdige

Satz von Casorati-Weierstraß:

Satz 5. *Eine ganze transzendente Funktion kommt außerhalb jedes Kreises noch jedem Werte beliebig nahe. Oder in Zeichen: Wenn die komplexe Zahl c und die positiven Zahlen ε und R beliebig gegeben werden, so ist die Forderung*

$$|f(z) - c| < \varepsilon$$

stets durch geeignete $|z| > R$ erfüllbar[1]).

Beweis. a) Hat $f(z)$ unendlich viele c-Stellen, so können sie nach § 21, Satz 1, nicht alle im Kreise $|z| \leqq R$ liegen, so daß außerhalb dieses Kreises sogar noch $f(z) - c = 0$ erfüllbar ist.

[1]) Oder anders ausgedrückt: die Menge der von $f(z)$ außerhalb des Kreises $|z| = R$ angenommenen Werte w liegt überall dicht in der w-Ebene, wie groß auch R vorgeschrieben wird.

b) Besitzt $f(z)$ keine c-Stellen, so ist auch $\frac{1}{f(z)-c} = f_1(z)$ eine (nicht konstante) ganze Funktion, so daß es nach Satz 1 Punkte z mit $|z| > R$ gibt, für die $|f_1(z)| > 1/\varepsilon$, d. h. $|f(z) - c| < \varepsilon$ ist.

c) Hat $f(z)$ endlich viele c-Stellen, so mögen diese in $z_1, z_2, \ldots, z_k$ liegen und die Ordnungen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ haben. Dann ist (s. § 21, Satz 4)

$$\frac{f(z)-c}{(z-z_1)^{\alpha_1}(z-z_2)^{\alpha_2}\cdots(z-z_k)^{\alpha_k}} = f_1(z)$$

wieder eine ganze Funktion, aber eine solche ohne Nullstellen, so daß auch $\frac{1}{f_1(z)} = f_2(z)$ eine ganze, und zwar sicher transzendente Funktion ist. Nach Satz 4 ist daher die Ungleichung

$$|f_2(z)| > (2/\varepsilon) \cdot |z|^m$$

für gewisse z außerhalb jedes Kreises erfüllbar. Hierin soll $m = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k$ sein. Es ist dann also

$$(1) \qquad |f(z) - c| < \frac{\varepsilon}{2} \left| \frac{(z-z_1)^{\alpha_1}\cdots(z-z_k)^{\alpha_k}}{z^m} \right| .$$

Da aber für alle hinreichend großen z, etwa für alle $|z| > R_1 > R$

$$(2) \qquad \left| \frac{(z-z_1)^{\alpha_1}\cdots(z-z_k)^{\alpha_k}}{z^m} \right| < 2$$

ist, so folgt, wenn wir uns in (1) auch $|z| > R_1$ denken, daß für dieses z die Beziehungen (1) und (2) gelten, so daß also auch

$$|f(z) - c| < \varepsilon$$

erfüllt ist.

Aufgabe: Man beweise den letzten Satz kürzer mit Hilfe der in den §§ 29 und 30 behandelten Laurentschen Entwicklung von

$$\frac{1}{f(z)-c}$$

für große $|z|$.

Vierter Abschnitt

Von den singulären Stellen

10. Kapitel. Die Laurentsche Entwicklung

§ 29. Die Entwicklung

Bisher haben wir ausschließlich die Funktionen in Bereichen untersucht, in denen sie sich regulär verhielten. Wir wollen jetzt den Fall näher betrachten, daß im Innern des Bereiches auch singuläre Stellen vorhanden sind; doch soll die Funktion in demselben eindeutig sein. — Um etwas Bestimmtes vor Augen zu haben, wollen wir annehmen, $f(z)$ sei in einem konzentrischen Kreisringe um z_0 eindeutig und regulär, während über ihr Verhalten außerhalb des größeren Kreises $\mathfrak{K}_1$ (mit r_1) und innerhalb des kleineren Kreises $\mathfrak{K}_2$ (mit r_2; $0 \leqq r_2 < r_1$) und auf deren Rändern nichts bekannt sein soll.

Wir werden dann eine Entwicklung angeben, die für jedes z im Ringe, für das also $r_2 < |z - z_0| = \varrho < r_1$ ist, konvergiert und $f(z)$ darstellt. Dazu wähle man zwei Radien ϱ_1 und ϱ_2, für die

$$r_2 < \varrho_2 < \varrho < \varrho_1 < r_1$$

ist. Die Kreise um z_0 mit diesen Radien seien $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$. Im Ringe zwischen diesen und auf seinem Rande ist dann $f(z)$ regulär, da er ganz im Innern des ersten Ringes liegt. Man verbinde $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ durch zwei (etwa radiale) Hilfswege $\mathfrak{l}'$ und $\mathfrak{l}''$, die indessen nicht durch z gehen dürfen. Verfährt man nun genau wie in § 14, 4, so ergibt sich

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta ,$$

wenn $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ beide positiv orientiert sind. Nun ist aber (vgl. hierzu den Beweis des Satzes 1 in § 20)

a) für das erste Integral, da hier ζ ein Punkt des Kreises $\mathfrak{C}_1$ ist:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}},$$

eine Reihe, die wegen $\left|\dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| = \dfrac{\varrho}{\varrho_1} < 1$ für alle ζ auf $\mathfrak{C}_1$ gleichmäßig konvergiert;

b) für das zweite Integral, da hier ζ auf $\mathfrak{C}_2$ liegt:

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}},$$

eine Reihe, die wegen $\left|\dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right| = \dfrac{\varrho_2}{\varrho} < 1$ für alle ζ auf $\mathfrak{C}_2$ gleichmäßig konvergiert. Setzt man diese speziellen Entwicklungen von $\dfrac{1}{\zeta - z}$ in die Integrale ein, so darf wegen der gleichmäßigen Konvergenz (bezüglich ζ) gliedweise integriert werden, und man erhält

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}_1} \frac{f(\zeta)\,(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}_2} \frac{f(\zeta)\,(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}\, d\zeta.$$

Setzt man nun zur Abkürzung

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta = a_n, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

und

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}_2} f(\zeta)\,(\zeta - z_0)^{n-1} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}_2} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} = a_{-n}, \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

so hat man

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n},$$

wofür man auch kürzer

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

zu schreiben pflegt.

Wir haben also eine Darstellung von $f(z)$ als Summe einer aufsteigenden Potenzreihe Σ_1 und einer absteigenden Potenzreihe Σ_2 gewonnen. Beide konvergieren, wenn z im Innern des Ringgebietes zwischen $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ liegt. Denn man erkennt nachträglich, daß die Werte der Koeffizienten a_n und a_{-n} von der Form der Integrationswege der sie definierenden Integrale (also von ϱ_1 bzw. ϱ_2) unabhängig sind: nach § 14, 1 darf statt $\mathfrak{C}_1$ bzw. $\mathfrak{C}_2$ jeder andere ganz im Ringgebiet zwischen $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ verlaufende geschlossene Weg gewählt werden, der $\mathfrak{K}_2$ einmal positiv umläuft. Insbesondere darf für $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ beidemal derselbe Weg dieser Art genommen werden. Im Gegensatz zu Satz 1 in § 20 sind aber die a_n und a_{-n} jetzt nicht die Werte von Ableitungen unserer Funktion.

Die gewonnene Reihe wird die **Laurentsche Entwicklung von $f(z)$** für das Ringgebiet genannt.

§ 30. Erläuterungen und Beispiele

Um die Formel des vorigen Paragraphen recht zu verstehen, betrachten wir einzeln die durch die beiden Summen Σ_1 und Σ_2 dargestellten Funktionen:

$$f_1(z) = \Sigma_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z)^n$$

ist eine gewöhnliche Potenzreihe von $z - z_0$, konvergiert also für alle z in $\mathfrak{K}_1$ und stellt eine dort reguläre Funktion dar.

$$f_2(z) = \Sigma_2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

erweist sich ebenfalls sogleich als eine gewöhnliche Potenzreihe; man braucht nur

$$a_{-n} = b_n \text{ und } (z - z_0)^{-1} = z'$$

zu setzen. Dann ist nämlich

$$f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z'^n.$$

Da Σ_2 sicher für $r_2 < |z - z_0| < r_1$ konvergiert, so konvergiert diese neue Reihe sicher für

$$1/r_1 < |z'| < 1/r_2,$$

also, da sie eine gewöhnliche Potenzreihe von z' ist, für alle $|z'| < 1/r_2$ und stellt eine dort reguläre Funktion dar. Geht man zu z zurück, so heißt dies: Σ_2 konvergiert für alle z, für die

$$|z - z_0| > r_2$$

ist, d. h. überall außerhalb $\mathfrak{R}_2$, und stellt eine dort reguläre Funktion von z dar.

$f(z)$ erscheint also zerlegt in eine innerhalb $\mathfrak{R}_1$ und eine außerhalb $\mathfrak{R}_2$ reguläre Funktion. Im Ringgebiet sind beide regulär.

Hieraus und aus der sogleich hernach zu beweisenden Einzigkeit der Laurentschen Entwicklung folgt dann sofort, daß das genaue Konvergenzgebiet derselben der breiteste Ring ist, der aus dem bisherigen Ringe durch (konzentrisches) Zusammenschrumpfen des inneren Kreises $\mathfrak{R}_2$ und Ausdehnung des äußeren Kreises $\mathfrak{R}_1$ gebildet werden kann und der noch frei von singulären Stellen ist, — der also mindestens je eine singuläre Stelle auf jedem der beiden Kreise besitzt. (Liegt innerhalb $\mathfrak{R}_2$ überhaupt keine singuläre Stelle, so würde hierbei das innere Gebiet und damit f_2 bzw. Σ_2 ganz fortfallen!)

Genau wie die Taylorsche Entwicklung ist auch die soeben gefundene Laurentsche die einzig mögliche. Denn hat man, für ein gemeinsames Ringgebiet gültig, gleichzeitig

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ und } = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

so folgt, indem man die beiden Entwicklungen mit $(z - z_0)^{-k-1}$ multipliziert und über einen Kreis um z_0 integriert, der ganz im Ringgebiet liegt und auf dem daher die entstehende Reihe bezüglich z gleichmäßig konvergiert:

$$2\pi i a_k = 2\pi i c_k, \text{ d. h. } a_k = c_k,$$
$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Beispiele. Man findet ohne Schwierigkeit die Entwicklungen:

(1) $$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n},$$
$$(1 < |z| < 2),$$

oder

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-1} - 1}{z^n}, \qquad (2 < |z| < \infty).$$

Hier haben wir also zwei verschiedene Entwicklungen für dieselbe Funktion; doch bedeutet dies keinen Widerspruch gegen den eben bewiesenen Satz, da sie für verschiedene Ringgebiete gelten.

(2) $$e^z + e^{1/z} = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} = 1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{|n|!},$$
$$(0 < |z| < \infty),$$

(3) $$\sin \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{5}{6} \frac{1}{z^3} + \frac{1}{2} \frac{1}{z^4} + \cdots,$$
$$(1 < |z| < \infty).$$

Aufgabe. Man entwickle die Funktionen:

$$\exp \frac{1}{1-z} \text{ für } |z| > 1$$

und

$$\sqrt{(z-1)(z-2)} \text{ für } |z| > 2$$

in eine Laurentsche Reihe.

11. Kapitel. Die verschiedenen Arten singulärer Stellen

§ 31. Wesentlich und außerwesentlich singuläre Stellen oder Pole

Besonderes Interesse verdient der Fall, daß im Innern von $\mathfrak{K}_2$ der Mittelpunkt z_0 die einzige singuläre Stelle von $f(z)$ ist. Die Laurentsche Entwicklung

$$(1) \qquad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

konvergiert dann für alle z, für die $0 < |z - z_0| < r_1$ ist, wo nun $r_1 (> 0)$ die Entfernung von z_0 bis zur nächstgelegenen singulären Stelle ist.

z_0 heißt in diesem Falle eine isolierte singuläre Stelle. Eine Entwicklung der Form (1) ist also stets in der Umgebung einer solchen isolierten Stelle möglich, falls $f(z)$ dort eindeutig ist, und erlaubt eine genauere Untersuchung derselben. Schreibt man den absteigenden Teil der Entwicklung (1) wieder (s. o.) in der Form $\Sigma b_n z'^n$, so erkennt man, daß er in diesem Falle eine ganze Funktion von z' darstellt.

Je nachdem nun diese ganze Funktion eine ganze transzendente oder eine ganze rationale ist, je nachdem also der absteigende Teil der Entwicklung unendlich viele oder nur endlich viele Glieder (aber dann mindestens eines) hat, nennt man z_0 eine wesentlich oder außerwesentlich singuläre Stelle. Im letzteren Falle nennt man z_0 auch kürzer einen **Pol**. Ist dabei $a_{-m} (m \geqq 1)$ der letzte von 0 verschiedene Koeffizient, so heißt z_0 ein Pol m-ter Ordnung; durch Multiplikation mit $(z - z_0)^m$ (aber keiner kleineren Potenz) geht dann $f(z)$ in eine Funktion über, die in z_0 und Umgebung regulär und in z_0 von 0 verschieden ist, falls man sie in z_0 durch den Grenzwert für $z \to z_0$ erklärt.

Die Bezeichnungen „Pol“ und „wesentlich-singuläre Stelle“ beziehen sich hiernach zunächst nur auf isolierte

singuläre Stellen, in deren Umgebung die Funktion eindeutig ist.

Den absteigenden Teil der Entwicklung der Funktion nennt man ihren Hauptteil bei z_0.

Die folgenden Sätze zeigen den Unterschied im Charakter der beiden Arten singulärer Stellen:

Satz 1. *Hat $f(z)$ in z_0 einen Pol (ist also $\Sigma_2 = \Sigma b_n z'^n$ eine ganze rationale Funktion von z') und ist $G > 0$ beliebig gegeben, so läßt sich $\delta > 0$ so angeben, daß für alle $0 < |z - z_0| < \delta$*

$$|f(z)| > G$$

ist, d. h. für alle nahe bei z_0 gelegenen z ist der Betrag von $f(z)$ sehr groß; oder: bei der Annäherung an einen Pol wird die Funktion bestimmt unendlich. (Vgl. hierzu § 28, 2.)

Beweis. Es sei z_0 ein Pol α-ter Ordnung, also

$$f(z) = \frac{a_{-\alpha}}{(z-z_0)^\alpha} + \cdots + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots$$

$$= \frac{a_{-\alpha}}{(z-z_0)^\alpha}\{1 + b_1(z-z_0) + \cdots\},$$

$$\left(\text{mit } a_{-\alpha} \neq 0,\ b_k = \frac{a_{-\alpha+k}}{a_{-\alpha}},\ k = 1, 2, \ldots\right).$$

Man wähle nun δ so klein, daß $\delta^\alpha < |a_{-\alpha}| / 2G$ und daß der Wert der geschweiften Klammer für alle $|z - z_0| < \delta$ absolut genommen $> \frac{1}{2}$ ausfällt, was sicher möglich, da es sich um eine Potenzreihe mit dem konstanten Gliede 1 handelt. Dann ist für alle $0 < |z - z_0| < \delta$

$$|f(z)| \geqq \frac{|a_{-\alpha}|}{\delta^\alpha} \cdot \frac{1}{2} > G, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

2. Dem Casorati-Weierstraßschen Satz 5 in § 28 entsprechend gilt hier der

Satz 2. *Hat $f(z)$ in z_0 eine wesentlich singuläre Stelle (ist also $\Sigma_2 = \Sigma b_n z'^n$ eine ganze transzendente Funktion von z'), so*

kommt $f(z)$ in jeder Nähe von z_0 jedem Werte noch beliebig nahe. Oder genauer: Wenn c eine beliebige komplexe und δ und ε zwei beliebige (kleine) positive Größen sind, so gibt es stets Punkte z, für die

$$|z - z_0| < \delta \text{ und } |f(z) - c| < \varepsilon$$

ist[1]).

Beweis. Wir setzen, indem wir das konstante Glied zur zweiten Summe ziehen,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} = \varphi_1(z) + \varphi_2(z).$$

Hierin ist $\varphi_1(z)$ in z_0 stetig und $\varphi_1(z_0) = 0$. Man kann also $\delta_1 \leqq \delta$ so angeben, daß für alle $|z - z_0| < \delta_1$ stets $|\varphi_1(z)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ ist. $\varphi_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z'^n$ dagegen ist eine ganze transzendente Funktion von z', so daß nach dem Casorati-Weierstraßschen Satz in § 28 die Bedingung $|\varphi_2(z) - c| < \frac{1}{2}\varepsilon$ für gewisse sehr große z', z. B. solche, für die $|z'| > 1/\delta_1$ ist, erfüllt werden kann. Dies bedeutet: für gewisse z mit $|z - z_0| < \delta_1$ ist $|\varphi_2(z) - c| < \frac{1}{2}\varepsilon$.

Für diese z ist dann

$$|f(z) - c| \leqq |\varphi_1(z)| + |\varphi_2(z) - c| < \varepsilon, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Beispiele:

1. $\exp(1/z)$ hat (vgl. § 30, Beispiel 2) in $z = 0$ eine wesentlich singuläre Stelle.

2. Eine rationale Funktion

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_k z^k}$$

kann nur in denjenigen Punkten singulär sein, in denen der Nenner 0 ist. Ist z_1 eine Nullstelle α-ter Ordnung des Nenners und zu-

[1]) Oder anders ausgedrückt: Die Menge der von $f(z)$ innerhalb des Kreises $|z - z_0| < \delta$ angenommenen Werte w liegt überall dicht in der w-Ebene, wie klein auch δ vorgeschrieben wird.

gleich eine Nullstelle β-ter Ordnung des Zählers ($\alpha \geqq 0, \beta \geqq 0$; vgl. S. 92, Fußnote), so hat, wie man sehr leicht findet, $f(z)$ in z_1 einen Pol $(\alpha - \beta)$-ter Ordnung, falls $\alpha > \beta$ ist, dagegen eine Nullstelle $(\beta - \alpha)$-ter Ordnung, falls $\beta \geqq \alpha$ ist[1]). (Schon dieses Beispiel lehrt, daß es vorteilhaft sein wird, die Pole als Nullstellen negativer Ordnung aufzufassen.)[2]) Eine rationale Funktion hat also in angebbarer Entfernung vom Nullpunkte keine anderen singulären Stellen als Pole (vgl. hierzu noch § 32, Beispiel 2 u. 3 und Satz 1).

3. Die Funktionen $\operatorname{tg} z$ und $\operatorname{ctg} z$ sind in den Nullstellen von $\cos z$ bzw. $\sin z$ unstetig, also singulär. Man erkennt leicht, daß es sich dort um Pole erster Ordnung handelt:

Untersuchen wir etwa $\operatorname{ctg} z$ an der Stelle $z = 0$. Diese Stelle ist jedenfalls eine isolierte Singularität, da die nächsten neuen Nullstellen von $\sin z$ erst $z = \pm \pi$ sind. $\operatorname{ctg} z$ gestattet also eine Laurentsche Entwicklung, von der man hiernach im voraus weiß, daß sie notwendig für alle

$$0 < |z| < \pi$$

(und nur für diese) gelten muß.

Beginnt man die Division der Potenzreihen für $\cos z$ und $\sin z$ auszuführen (vgl. Elem., § 43), so findet man als Anfang der Entwicklung:

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} - \frac{1}{3} z - \frac{1}{45} z^3 - \cdots .$$

Wegen der Einzigkeit einer solchen Entwicklung (s. § 30) ist dies der Anfang der Laurentschen Entwicklung von $\operatorname{ctg} z$ für die Umgebung des Punktes $z = 0$. Aus ihr liest man sofort ab, daß $z = 0$ ein Pol erster Ordnung ist.

Die Sätze 1 und 2 werden wesentlich ergänzt durch den wichtigen **Satz von Riemann:**

Satz 3. *Ist $f(z)$ eine in einer Umgebung von z_0 eindeutige und, von z_0 selbst noch abgesehen, reguläre Funktion, so kann diese dann und nur dann durch geeignete Erklärung ihres Wertes in z_0 zu einer in z_0 regulären Funktion gemacht werden, wenn sie in einer Umgebung von z_0 beschränkt ist. Ist dies der Fall,*

[1]) In diesem Falle ist $f(z_1)$ durch den Wert $\lim f(z)$ für $z \to z_1$ zu erklären.
[2]) Ein Pol 0-ter Ordnung ist dann zugleich eine Nullstelle 0-ter Ordnung, d. h. eine Stelle, an der $f(z)$ regulär und $\neq 0$ ist.

so ist $\lim f(z)$ *für* $z \to z_0$ *vorhanden, und* $f(z)$ *wird in* z_0 *regulär, wenn* $f(z_0)$ *gleich diesem Grenzwert gesetzt wird.*

Beweis. I. Ist $f(z)$ bei geeigneter Erklärung des Funktionswertes $f(z_0)$ in z_0 regulär, so ist $f(z)$ gewiß in einer Umgebung von z_0 beschränkt.

II. Ist umgekehrt die Funktion $f(z)$ in $0 < |z - z_0| < \delta$ regulär, eindeutig und beschränkt, so ist sie sogar in z_0 regulär. Denn sie kann in dem genannten Gebiete jedenfalls in eine Laurentsche Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

entwickelt werden; und wäre in dieser ein a_n mit $n \leqq -1$ von 0 verschieden, so wäre $f(z)$ nach den Sätzen 1 und 2 in keiner Umgebung von z_0 beschränkt. Also sind alle diese $a_n = 0$ und $f(z)$, wofern $f(z_0) = a_0 = \lim f(z)$ für $z \to z_0$ gesetzt wird, in z_0 regulär [1]).

Auf die Untersuchung der nicht isolierten singulären Stellen und derjenigen, in deren Umgebung die Funktion nicht eindeutig ist (wie $z = 0$ bei $\log z$ und bei $z^{1/m}$), soll hier nicht eingegangen werden. Wegen der letzteren vgl. die S. 106, Fußnote, genannte Funktionentheorie II, 4. Kap.

Aufgabe: Man verifiziere die Richtigkeit des Casorati-Weierstraßschen Satzes bei der Funktion $\exp(1/z)$, indem man ihre Werte untersucht, die sie auf den vom Nullpunkt ausgehenden Radien in der Nähe des Nullpunktes annimmt. — Man bestimme diejenigen Punkte z, in denen $\exp(1/z) = i$ ist. Was für eine Punktmenge bilden diese?

§ 32. Verhalten analytischer Funktionen im Unendlichen

Unsere Definition der vollständigen analytischen Funktion (§ 24) hatte die Lücke, daß wir noch Festsetzungen treffen

[1]) War $f(z)$ in z_0 schon erklärt, aber von a_0 verschieden, so spricht man von einer hebbaren Singularität, da sie dadurch behoben werden kann, daß man in Abänderung jener Erklärung $f(z_0) = a_0$ setzt.

mußten, um das Verhalten einer Funktion im Unendlichen bezeichnen zu können.

Wie soeben, beschränken wir uns auf den Fall, daß $f(z)$ in der Umgebung des Punktes ∞ (s. § 2) eindeutig und regulär ist. Es sei demgemäß $f(z)$ für $|z| > R$ eindeutig und regulär. Setzt man dann $z = 1/z'$, so ist die durch $f(z) = f(1/z') = \varphi(z')$ für $|z'| < 1/R$ definierte Funktion $\varphi(z')$ dort eindeutig und regulär, letzteres möglicherweise mit Ausnahme des Punktes $z' = 0$ selbst.

Wir setzen nun einfach fest:

Erklärung. *Der Funktion $f(z)$ wird im Unendlichen dasjenige Verhalten zugeschrieben, das $\varphi(z')$ in $z' = 0$ aufweist.*

Also im einzelnen: Nach unseren Voraussetzungen gestattet $\varphi(z')$ in $0 < |z'| < 1/R$ eine Laurentsche Entwicklung

$$\varphi(z') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z'^n, \tag{1}$$

aus der das Verhalten von $\varphi(z')$ bei $z' = 0$ nach dem letzten Paragraphen abgelesen werden kann. Diese Entwicklung unterscheidet sich aber lediglich in der Bezeichnung von der nach Voraussetzung für $|z| > R$ sicher möglichen Laurentschen Entwicklung von $f(z)$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n; \tag{2}$$

denn es ist $a_n = b_{-n}$ und $z = 1/z'$ und umgekehrt.

Übertragen wir also sogleich das für $\varphi(z')$ aus (1) abgelesene Verhalten auf $f(z)$, so ergibt sich, daß jetzt „der Punkt ∞" die betrachtete isolierte Stelle ist, daß der aufsteigende Teil von (2) als der zugehörige Hauptteil anzusehen ist, und daß daher

a) $f(z)$ in ∞ eine wesentlich singuläre Stelle hat, wenn in (2) unendlich viele positive Potenzen einen von 0 verschiedenen Koeffizienten haben;

b) $f(z)$ in ∞ einen Pol β-ter Ordnung besitzt, wenn in (2) nur endlich viele positive Potenzen auftreten und bei ihnen a_β der letzte von 0 verschiedene Koeffizient ist ($\beta \geqq 1$);

c) $f(z)$ in ∞ sich regulär verhält, wenn in (2) gar keine positiven Potenzen auftreten. — In diesem letzten Falle wird a_0 als Wert der Funktion in ∞ angesehen: $f(\infty) = a_0$. Ist $a_{-1} = \cdots = a_{-(p-1)} = 0$, $a_{-p} \neq 0$, so liegt in ∞ eine „a_0-Stelle p-ter Ordnung".

Beispiele:

1. $\dfrac{1}{1-z}$ ist in $z = \infty$ regulär, $\left(\text{weil } = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} \text{ für } |z| > 1\right)$ und besitzt dort eine Nullstelle erster Ordnung.

2. Jede rationale Funktion, bei der der Grad k des Nenners größer oder gleich dem Grade m des Zählers ist, ist regulär in $z = \infty$; $f(\infty)$ ist $= 0$ oder $\neq 0$, je nachdem $k > m$ oder $= m$ ist.

3. Jede rationale Funktion, bei der $k < m$ ist, hat einen Pol $(m-k)$-ter Ordnung in $z = \infty$. — Speziell: Eine ganze rationale Funktion m-ten Grades hat einen Pol m-ter Ordnung in $z = \infty$.

4. e^z, $\sin z$, $\cos z$ und jede andere ganze transzendente Funktion ist wesentlich singulär in $z = \infty$.

Da es sich bei den neuen Definitionen nur um eine Bezeichnungsübertragung handelt, so gelten (in sinngemäßer Abänderung des Wortlauts) auch für den Punkt ∞ die drei Sätze des vorigen Paragraphen.

Satz 1. *Hat $f(z)$ in ∞ einen Pol, so läßt sich nach Wahl von $G > 0$ stets eine so kleine Umgebung*[1]) *desselben abgrenzen, daß für alle Punkte derselben (d. h. also für alle $|z| > R$, bei hinreichend großem R) stets $|f(z)| > G$ ist.*

Satz 2. *Hat $f(z)$ in ∞ eine wesentlich singuläre Stelle, so gibt es nach Wahl der komplexen Zahl c und der positiven Zahlen ε und R stets Punkte z, für die*

[1]) Unter einer kleinen „Umgebung von ∞" hat man (s. § 2) das Äußere eines großen Kreises (um 0) zu verstehen.

$$|z| > R \quad \text{und} \quad |f(z) - c| < \varepsilon$$

ist.

Satz 3. *Ist $f(z)$ eine in einer Umgebung von ∞ eindeutige und, von ∞ selbst noch abgesehen, reguläre Funktion, so kann diese dann und nur dann zu einer in ∞ regulären Funktion gemacht werden, wenn sie in einer Umgebung $|z| > R$ von ∞ beschränkt ist. Ist dies der Fall, so ist $\lim f(z)$ für $z \to \infty$ vorhanden, und $f(z)$ wird in ∞ regulär, wenn $f(\infty)$ gleich diesem Grenzwert gesetzt wird.*

Aufgabe. Was für eine Singularität haben die Funktionen

$$\frac{z^2+4}{e^z}, \quad \cos z - \sin z, \quad \operatorname{ctg} z$$

im Punkte $z = \infty$?

§ 33. Der Residuensatz

Ist $f(z)$ in der Umgebung von z_0 regulär, so ist nach dem Cauchyschen Satze

$$\int f(z)\,dz = 0,$$

wenn eine kleine, den Punkt z_0 umschließende Kurve $\mathfrak{C}$ als Weg gewählt wird. Hat dagegen $f(z)$ in z_0 eine isolierte singuläre Stelle, in deren Umgebung $f(z)$ sonst eindeutig und regulär ist, so wird dasselbe Integral im allgemeinen von Null verschieden sein. Sein Wert läßt sich sofort angeben: Da $f(z)$ für eine Umgebung von z_0 $(0 < |z - z_0| < r)$ in eine Laurentsche Reihe entwickelt werden kann, so hat man nach § 29, wenn $\mathfrak{C}$ im positiven Sinne durchlaufen wird, sofort die Beziehung

$$(1) \qquad \frac{1}{2\pi i} \overset{\mathfrak{C}}{\int} f(z)\,dz = a_{-1}.$$

Den Wert dieses Integrals oder also den Koeffizienten der ersten negativen Potenz in der Laurentschen Entwicklung

nennt man das **Residuum** von $f(z)$ in z_0[1]), und die obige Formel stellt in gewissem Sinne eine Erweiterung des Cauchyschen Satzes dar.

Allgemeiner kann man den folgenden sog. **Residuensatz** beweisen:

Satz 1. *Die Funktion $f(z)$ sei in dem (beliebigen) Gebiete $\mathfrak{G}$ eindeutig und regulär. Ist dann $\mathfrak{C}$ ein doppelpunktfreier geschlossener, in $\mathfrak{G}$ liegender Weg, in dessen Innengebiet nur endlich viele (isolierte) singuläre Stellen liegen, so ist*

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{\mathfrak{C}} f(z)\,dz = \begin{cases} \text{der Summe der Residuen von } f(z) \text{ in den} \\ \text{von } \mathfrak{C} \text{ umschlossenen singulären Stellen.} \end{cases}$$

Beweis. Sind $z_1, z_2, \ldots, z_m$ die genannten endlich vielen singulären Stellen und sind $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_m$ hinreichend kleine (positiv orientierte) Kreise um $z_1, z_2, \ldots, z_m$, so ist nach § 14, Satz 2

$$^{\mathfrak{C}}\int f(z)\,dz = {}^{\mathfrak{C}_1}\int f(z)\,dz + {}^{\mathfrak{C}_2}\int f(z)\,dz + \cdots + {}^{\mathfrak{C}_m}\int f(z)\,dz.$$

Hieraus ergibt sich nach Division durch $2\pi i$ die Richtigkeit des Satzes, da dann rechts die fraglichen Residuen stehen.

Dieser Residuensatz gestattet zahlreiche bedeutsame Anwendungen. Bei ihnen wird im allgemeinen das Residuum von der Laurentschen Entwicklung her bekannt sein und so der Wert des Integrals angegeben werden können. Hier können nur ein paar einfache Beispiele dazu gegeben werden.

1. Unter den Voraussetzungen des Residuensatzes werde z. B. angenommen, daß $m = 0$, d. h. $f(z)$ in dem ganzen Innengebiet von $\mathfrak{C}$ regulär ist und daß längs $\mathfrak{C}$ überdies $f(z) \neq 0$ ist. Dann können nach § 21, Satz 1 von $\mathfrak{C}$ nur endlich viele Nullstellen umschlossen werden. Es seien dies die Stellen $z_1, z_2, \ldots, z_m$, deren Ordnung bezüglich $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ sein möge. Man pflegt eine Nullstelle α-ter Ordnung (ebenso einen Pol) als eine α-fache Nullstelle (bzw. Pol) anzusehen

[1]) Hierbei soll z_0 wieder im Endlichen gedacht werden.

und demgemäß bei einer Abzählung α-mal zu zählen. Danach ist die Anzahl N der Nullstellen von $f(z)$ innerhalb $\mathfrak{C}$

$$N = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m.$$

Für diese gilt der

Satz 2. *Es ist*

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz. \tag{2}$$

Beweis. Der Integrand ist auf dem Wege $\mathfrak{C}$ regulär; innerhalb desselben sind $z_1, z_2, \ldots, z_m$ singuläre Stellen. Man erkennt leicht, daß z_ν ein Pol erster Ordnung mit dem Residuum α_ν ist. Denn hat allgemein $f(z)$ in a eine Nullstelle α-ter Ordnung, so ist

$$f(z) = a_\alpha (z-a)^\alpha + a_{\alpha+1}(z-a)^{\alpha+1} + \cdots$$
$$f'(z) = \alpha a_\alpha (z-a)^{\alpha-1} + \cdots.$$

Also ist (vgl. Elem., § 30 u. 35), da $a_\alpha \neq 0$ ist,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\alpha}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \cdots$$

die für eine gewisse Umgebung von a gültige Laurentsche Entwicklung von $f'(z)/f(z)$, bei der die Kenntnis der Koeffizienten c_ν nicht einmal nötig ist. Folglich ist a, wie behauptet, ein Pol erster Ordnung mit dem Residuum α. Dann folgt aber nach dem Residuensatz sofort

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m = N, \quad \text{w. z. b. w.}$$

2. Unter denselben Annahmen wie in 1. ist für eine gewisse Umgebung von a

$$z\frac{f'(z)}{f(z)} = [a + (z-a)]\left[\frac{\alpha}{z-a} + c_0 + \cdots\right]$$
$$= \frac{\alpha a}{z-a} + c_0' + c_1'(z-a) + \cdots$$

die Laurentsche Entwicklung von $zf'(z)/f(z)$. Diese Funktion hat also in a einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum αa. Es gilt daher der

Satz 3. *Unter den gleichen Voraussetzungen wie in Satz 2 ist*

$$(3)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} z\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \cdots + \alpha_m z_m,$$

also gleich der Summe aller von $\mathfrak{C}$ umschlossenen Nullstellen von $f(z)$.

3. Hat $f(z)$ in a einen Pol β-ter Ordnung, so findet man genau ebenso, daß $\frac{f'(z)}{f(z)}$ in a einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum $-\beta$ und $zf'(z)/f(z)$ einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum $-\beta a$ hat. Liegen also innerhalb $\mathfrak{C}$ noch die endlich vielen Pole $z_1', z_2', \ldots, z_k'$ mit den Ordnungen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$, so ist

$$(4)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m - (\beta_1 + \cdots + \beta_k)$$

und

$$(5)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} z\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \alpha_1 z_1 + \cdots + \alpha_m z_m - (\beta_1 z_1' + \cdots + \beta_k z_k').$$

Hierin tritt rechts die Anzahl bzw. die Summe der von $\mathfrak{C}$ umschlossenen Pole auf, in demselben Sinne wie in (2) und (3) die der Nullstellen. Es gilt also der

Satz 4. *Es sei $f(z)$ in $\mathfrak{G}$ eindeutig und regulär und $\mathfrak{C}$ ein doppelpunktfreier geschlossener, in $\mathfrak{G}$ liegender Weg. Ist dann $f(z)$ längs $\mathfrak{C}$ von Null verschieden und liegen im Innengebiet von $\mathfrak{C}$ höchstens endlich viele singuläre Stellen, die sämtlich Pole sind, so liefert von den Integralen*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz \quad \text{und} \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} z\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$

das erste die Anzahl der von $\mathfrak{C}$ umschlossenen Nullstellen ver-

mindert um die Anzahl der Pole und das zweite die Summe dieser Nullstellen vermindert um die Summe der Pole — eine jede so oft berücksichtigt, wie es ihre Ordnung verlangt.

4. Der Residuensatz liefert ein besonders wichtiges Hilfsmittel für die Berechnung reeller bestimmter Integrale. Wir müssen uns damit begnügen, diese Anwendungen an einem ganz einfachen und durchsichtigen Beispiel zu erläutern: Es ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi, \tag{6}$$

wie man durch unbestimmte Integration mühelos findet. Mit Hilfe des Residuensatzes kann das Integral folgendermaßen berechnet werden. Es bedeute $\mathfrak{C}$ den Weg von $z=-R$ geradlinig nach R und von dort längs des oberen Halbkreises $|z|=R$ zurück nach $-R$. Da

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right)$$

ist, so umschließt dieser Weg, sobald $R>1$ ist, genau den einen Pol $z=i$ von $\frac{1}{1+z^2}$; in ihm ist das Residuum $=\frac{1}{2i}$. Daher ist

$$\int_{\mathfrak{C}} \frac{dz}{1+z^2} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi.$$

Also ist auch

$$\int_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{\mathfrak{H}} \frac{dz}{1+z^2} = \pi, \tag{7}$$

wenn $\mathfrak{H}$ den oben genannten Halbkreis bedeutet. Nach § 11, Satz 5 ist nun

$$\left| \int_{\mathfrak{H}} \frac{dz}{1+z^2} \right| \leqq \frac{\pi R}{R^2-1},$$

was $\to 0$ strebt, wenn $R \to +\infty$ rückt. Geht man also in (7) mit $R \to +\infty$, so ergibt sich unmittelbar die Gleichung (6).

In ähnlicher Weise kann ersichtlich das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ jeder reellen rationalen Funktion $f(z)$ berechnet werden, bei der der Nenner für alle reellen x stets $\neq 0$ ist und einen Grad hat, der den des Zählers um mindestens 2 übertrifft[1]). Es ergibt sich so: *Das Integral ist gleich $2\pi i$-mal der Summe der Residuen in den in der oberen Halbebene gelegenen Polen von $f(z)$.*

Aufgabe 1: $f(z)$ habe in a eine Nullstelle α-ter Ordnung. Welches ist, an der Stelle a, das Residuum von

$$\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)},$$

wenn $\varphi(z)$ eine beliebige in a reguläre Funktion bedeutet? Wie lautet die Antwort, wenn $f(z)$ in a einen Pol β-ter Ordnung hat?

Aufgabe 2: Im Anschluß an Aufgabe 1 bestimme man den Wert und die Bedeutung des Integrals

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz,$$

wenn bezüglich $f(z)$ und $\mathfrak{C}$ die Voraussetzungen eines der Sätze 2, 3 oder 4 dieses Paragraphen gemacht werden und $\varphi(z)$ in $\mathfrak{B}$ und im Innengebiet von $\mathfrak{C}$ regulär ist.

Aufgabe 3. Man zeige in ähnlicher Weise wie unter 4., daß

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

ist.

---

[1]) Das genannte Integral ist dann absolut konvergent und darum gleich dem Grenzwert des von $-R$ bis R genommenen Integrales für $R \to +\infty$, der andernfalls nur den sog. Cauchyschen Hauptwert des Integrales liefern würde.

§ 34. Umkehrung analytischer Funktionen

Ist eine Funktion $f(z)$ in z_0 regulär und ist $f(z_0) = w_0$, so liegen wegen der Stetigkeit der Funktion die Bilder aller Punkte aus einer (hinreichend kleinen) Umgebung von z_0 in einer vorgeschriebenen ε-Umgebung von w_0. Aus dieser Feststellung folgt aber nichts darüber, ob eine volle Umgebung von w_0 von diesen Bildern überdeckt wird oder nicht und ob andererseits das Bildgebiet mehrfach überdeckt werden kann oder nicht. Hierüber gilt der

Satz 1. *Ist $f(z)$ im Kreise $\mathfrak{K}: |z - z_0| < \varrho$ regulär und wird der Wert $w_0 = f(z_0)$ in z_0 von der ersten Ordnung angenommen, ist also $f'(z_0) \neq 0$, so wird in der w-Ebene eine gewisse (kreisförmige) Umgebung von w_0 durch das Bild einer Umgebung*[1]) *von z_0 genau einmal überdeckt.*

Beweis. Die Funktion $f(z) - w_0$ ist ebenfalls in $\mathfrak{K}$ regulär. Sie hat in z_0 eine Nullstelle erster Ordnung. Nach § 21, Satz 2 läßt sich daher um z_0 ein so kleiner Kreis $\mathfrak{K}_1$ mit dem Radius $\varrho_1 < \varrho$ beschreiben, daß in seinem Innern und auf seinem Rande außer z_0 keine weitere Nullstelle von $f(z) - w_0$ mehr liegt. Auf seinem Rande hat dann $|f(z) - w_0|$ ein noch positives Minimum μ. Es läßt sich nun zeigen, daß jeder Wert w_1, der in dem Kreise $\mathfrak{K}'$ mit μ um w_0 in der w-Ebene liegt, für einen und nur einen Wert $z = z_1$ im Innern des Kreises $\mathfrak{K}_1$ erhalten wird, kurz also, daß $f(z) - w_1$ genau eine Nullstelle z_1 innerhalb $\mathfrak{K}_1$ hat, oder also (nach § 33, Satz 2), daß das (von dem Parameter w abhängende) Integral

$$(1) \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{K}_1} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} d\zeta \text{ [2])}$$

den Wert 1 hat, wenn für w irgendein bestimmter Punkt w_1 aus $\mathfrak{K}'$ eingesetzt wird. (Denn $f(\zeta) - w_1$ ist gemäß der Wahl

[1]) Diese Umgebung braucht nicht kreisförmig zu sein (s. § 3, 8.).

[2]) Im Zähler des Integranden ist $f'(\zeta)$ als Ableitung des Nenners nach ζ (bei festem w) anzusehen.

von μ längs $\mathfrak{K}_1$ von 0 verschieden.) Da nun das Integral (1) auf Grund unserer Voraussetzung und nach § 33, Satz 2 für $w = w_0$ sicher den Wert 1 hat und seiner Bedeutung gemäß immer gleich einer ganzen reellen Zahl sein muß, so muß es offenbar immer denselben Wert 1 haben, wenn noch gezeigt wird, daß sein Wert eine in $\mathfrak{K}'$ stetige Funktion von w darstellt. Das folgt aber (vgl. hierzu den Beweis in § 16) aus der leicht verständlichen Abschätzung

$$\left| \int_{\mathfrak{K}_1} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - w'} d\zeta - \int_{\mathfrak{K}_1} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} d\zeta \right| \leqq |w' - w| \cdot \frac{2M' \cdot l}{d^2},$$

in der M' das Maximum von $|f'(\zeta)|$ längs $\mathfrak{K}_1$, l die Länge dieses Weges, d den Abstand des Punktes w von der Kreislinie $\mathfrak{K}'$ bedeutet und $|w' - w| < \frac{1}{2} d$ gedacht ist.

Zusätze. 1. Wird w_0 in z_0 von der k-ten Ordnung ($k \geqq 1$) angenommen, so hat das Integral (1) für $w = w_0$ den Wert k und folglich (wegen seiner Stetigkeit in bezug auf w) den gleichen Wert k für jedes w in $\mathfrak{K}'$. Es wird dann also eine volle Umgebung von w_0 durch das Bild einer gewissen Umgebung von z_0 genau k-mal überdeckt.

2. Hiernach hat jeder innere Punkt eines Regularitätsgebietes von $f(z)$ als Bild wieder einen inneren Punkt des Bildgebietes. Unter diesem Gesichtspunkt wird der bewiesene Satz auch als Satz von der Gebietstreue bezeichnet: Das Bild eines Gebietes, in dem die abbildende Funktion regulär ist, ist, da die Bildmenge offenbar auch zusammenhängt, wieder ein Gebiet.

Nach dem Satz 1 ist also bei gegebenem w aus $\mathfrak{K}'$ der Punkt z in $\mathfrak{K}_1$ eindeutig bestimmt, für den $f(z) = w$ ist. Durch diese Forderung ist also eine in $\mathfrak{K}'$ eindeutige Funktion von w

$$z = \varphi(w)$$

so erklärt, daß immer $f(\varphi(w)) = w$ oder $\varphi(f(z)) = z$ ist.

Man nennt $z = \varphi(w)$ die zu $w = f(z)$ inverse Funktion[1]), und wir können den Inhalt von Satz 1 kurz so ausdrücken:

Zu jeder in z_0 regulären Funktion $f(z)$, für die $f'(z_0) \neq 0$ ist, gibt es in einer gewissen Umgebung des Punktes $w_0 = f(z_0)$ eine wohlbestimmte Umkehrfunktion $z = \varphi(w)$.

Nach § 33, Satz 3 (mit $m = 1, \alpha_1 = 1$) ergibt sich für diese die Darstellung

$$(2) \qquad \varphi(w) = z = \frac{1}{2\pi i} \overset{\mathfrak{K}_1}{\int} \zeta \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} d\zeta,$$

aus der man ebenso leicht wie für das Integral (1) abliest, daß $z = \varphi(w)$ eine in $\mathfrak{K}'$ stetige Funktion ist. Darüber hinaus aber gilt sogar der

Satz 2. *Die Umkehrfunktion $z = \varphi(w)$ ist eine in einer Umgebung von w_0 reguläre Funktion von w. Für ihre Ableitung gilt dort (wie im Reellen) die Gleichung*

$$\varphi'(w) = \frac{1}{f'(z)} = \frac{1}{f'(\varphi(w))}.$$

Der sehr einfache Beweis verläuft ebenfalls wie im Reellen: Für festes w_1 und benachbartes w in $\mathfrak{K}'$ ist

$$\frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{w - w_1} = \frac{z - z_1}{f(z) - f(z_1)}.$$

Da nun getrennten Punkten w_1, w auch getrennte Punkte z_1, z entsprechen und umgekehrt und wegen der Stetigkeit von $\varphi(w)$ für $w \to w_1$ auch $z \to z_1$ rückt, so liest man hieraus die Behauptung ab, da wegen $f'(z_0) \neq 0$ auch in einer Umgebung von z_0 überall $f'(z) \neq 0$ ist.

§ 35. Die rationalen Funktionen

Wie wir schon S. 94/95 hervorhoben, ist eine analytische Funktion nur selten durch einen expliziten Ausdruck rechnerisch realisierbar. Wir trafen diesen günstigen Fall bis-

[1]) Bei dieser ist also w die unabhängige und z die abhängige Veränderliche.

her nur bei den ganzen Funktionen und bei den rationalen Funktionen. Will man also bei einer Klassifikation der Funktionen „rein funktionentheoretisch" vorgehen, so muß man von der Darstellung der Funktionen ganz absehen und sie allein aus sich heraus (ihrem Wertevorrat, der Natur ihrer singulären Stellen u. ä.) charakterisieren. So sind die ganzen Funktionen — ganz abgesehen von der hier zufällig möglichen Gesamtdarstellung — allein dadurch charakterisiert, daß sie in der ganzen Ebene regulär sind. Und die Sätze § 28, 2 und 5 lehren sie „rein funktionentheoretisch" in rationale und transzendente ganze Funktionen zu scheiden.

Die folgenden beiden Sätze sollen in ähnlicher Art die Klasse der rationalen Funktionen charakterisieren:

Satz 1. *Eine rationale Funktion hat im Endlichen und im Unendlichen keine anderen Singularitäten als Pole.*

Der Beweis ist in § 31, Beispiel 2, und § 32, Beispiel 2 und 3 enthalten; und wir sind schon am Ziele, wenn wir die Umkehrung dieses Satzes beweisen:

Satz 2. *Wenn eine eindeutige Funktion im Endlichen und in $z = \infty$ keine anderen Singularitäten hat als Pole, so ist sie eine rationale Funktion.*

Beweis. Da $f(z)$ in $z = \infty$ höchstens einen Pol haben soll, und ein Pol definitionsgemäß isoliert ist, so ist sie außerhalb eines hinlänglich großen Kreises (d. h. in einer gewissen „Umgebung des Punktes $z = \infty$"), von $z = \infty$ selbst etwa abgesehen, überall regulär. Alle im Endlichen etwa gelegenen singulären Stellen liegen also in einem angebbaren Kreise. Dann kann es aber dort nur endlich viele solche Stellen geben, weil andernfalls in diesem Kreise (nach § 3, Satz 1) eine Häufungsstelle dieser singulären Stellen liegen müßte; diese wäre dann aber sicher kein Pol, weil sie nicht isoliert liegt. Liegt nun im Endlichen überhaupt keine singuläre Stelle, so wäre $f(z)$ eine ganze, und zwar nach § 32, Beispiel 4 notwendig rationale Funktion.

Sind aber $z_1, z_2, \ldots, z_k$ die endlich vielen im Endlichen gelegenen singulären Stellen, so läßt sich in der Umgebung einer jeden von ihnen $f(z)$ in eine Laurentsche Reihe entwickeln, die nur endlich viele negative Potenzen aufweisen kann:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(\nu)} (z - z_\nu)^n + \frac{a_{-1}^{(\nu)}}{z - z_\nu} + \cdots + \frac{a_{-\alpha_\nu}^{(\nu)}}{(z - z_\nu)^{\alpha_\nu}}.$$

Hierin gibt α_ν die Ordnung des Poles z_ν an, $(\nu = 1, 2, \ldots, k)$. Bezeichnet man den hinter der Potenzreihe stehenden Hauptteil mit $h_\nu(z)$, so ist $h_\nu(z)$ eine rationale Funktion, die nur die eine singuläre Stelle z_ν (Pol α_ν-ter Ordnung) hat und auch in $z = \infty$ regulär und dort $= 0$ ist.

Nun ist die Funktion

$$f(z) - h_1(z) - h_2(z) - \cdots - h_k(z)$$

ersichtlich eine ganze Funktion, also wieder, weil sie auch in ∞ nur höchstens einen Pol haben soll, eine ganze rationale Funktion $g(z)$, die sich eventuell auf eine Konstante (eine ganze rationale Funktion 0-ten Grades oder die Konstante 0) reduziert, falls der Punkt ∞ regulär ist.

Also ist

$$f(z) = g(z) + h_1(z) + h_2(z) + \cdots + h_k(z)^1),$$

womit der rationale Charakter von $f(z)$ schon aufgedeckt ist. Mit Rücksicht auf die spezielle Form der Hauptteile $h_\nu(z)$ können wir noch den Satz aussprechen:

Satz 3. *Eine rationale Funktion läßt sich in Teilbrüche zerlegen.* (Vgl. Elem., § 40.)

Wir schließen mit einem zweiten, auf dem Residuensatze beruhenden Beweise des Fundamentalsatzes der klassischen Algebra (vgl. § 28, 3 und Elem., § 39):

[1]) In dem vorweggenommenen Fall, daß $f(z)$ im Endlichen regulär ist, fehlen hier einfach die Summanden $h_\nu(z)$.

Ist $f(z)$ eine ganze rationale Funktion $a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m$, $(m \geqq 1, a_m \neq 0)$, so läßt sich nach § 28, Satz 2 ein Kreis $\mathfrak{K}$ um 0 mit R angeben, außerhalb dessen $|f(z)|$ überall > 1 ist, also gewiß keine Nullstelle mehr besitzt. Alle etwa vorhandenen Nullstellen von $f(z)$ liegen dann also innerhalb $\mathfrak{K}$.

Ihre Anzahl N wird nach § 33, Satz 2 durch

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{K}_1} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$$

geliefert, wenn $\mathfrak{K}_1$ ein Kreis um 0 mit $R_1 > R$ ist. Die für $|z| > R$ gültige Laurentsche Entwicklung des Integranden beginnt mit

$$\frac{m}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \frac{c_3}{z^3} + \cdots .$$

Da sie längs des Integrationsweges $|z| = R_1$ gleichmäßig konvergiert, so liest man aus ihr (auch ohne näheres über die Koeffizienten c_n zu wissen) sofort ab, daß der Wert des Integrales $= 2\pi i m$, also $N = m$ ist: Eine ganze rationale Funktion m-ten Grades hat genau m Nullstellen (Wurzeln), wenn jede so oft gezählt wird, wie es ihre Ordnung verlangt.

Register

Abbildung, konforme 33
— stereographische 10
Abgeschlossene Gebiete 25
— Mengen 14 ff.
Ableitung 32
—, höhere 68
Abschätzungsformel, Cauchysche 80
Absoluter Betrag 9
Abstand 9, 15
Abzählbare Mengen 18
Analytische Fortsetzung 93 ff.
— — durch Potenzreihen 99 ff.
— Funktionen 34
— — vollständige Definition 99 ff.
Analytisches Gebilde 104
Arcus 9
Argument 27
a-Stelle 91
Aufgeschnitten 111
Außengebiet 26
Äußerer Punkt 14
Außerwesentlich singuläre Stelle 123

Behnke, H. 59
Bereich 25
Beschränkte Funktionen 114
Beschränkte Mengen 13
Bestimmte Integrale 39 ff.
— —, Berechnung derselben 44 ff., 134
Bild 28
Bolzano-Weierstraßscher Satz 13

Casorati-Weierstraßscher Satz 116, 124
Cauchy-Hadamardscher Satz 71
Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen 35—37
Cauchysche Abschätzungsformel 80
— Integralformeln 64 ff.
Cauchyscher Integralsatz 51 ff.
— — Umkehrung 68
— Residuensatz 131 ff.
— — Anwendungen 131 ff.
Cauchysches Konvergenzprinzip 19
cos *z* s. sin *z*.
ctg *z* s. tg *z*.

Darstellung von Funktionen durch Reihen 72
Definitionsbereich 27
Differentialgleichung, Cauchy-Riemannsche 35—37
— Laplacesche 38
Differentialquotient 32
Differenzierbarkeit 29, 32—34
— vollständige 35
Doppelpunktfrei 21, 22
Doppelreihensatz 84
Drehungssinn, mathematisch-positiver 23, 47
Durchmesser 15
Durchschnitt 15

e^z s. Exponentialfunktion
Ebene Punktmengen 12
Eindeutige Funktionen 27, 106
Einfache Kurven 21
Einfach-zusammenhängend 25
Einheitskreis 9
Einschachtelungssatz 16
Element einer Funktion 94
— — Menge 12
Elementare Funktionen 28, 98 ff., 125, 126
Entwicklung analytischer Funktionen in Potenzreihen 80 ff.
Entwicklung, Laurentsche 118 ff.
Existenzgebiet 104
exp 99, 112
Exponentialfunktion 28, 98, 129

Fast alle 16, 19
Fortsetzung, analytische 93 ff.
— reeller Funktionen ins Komplexe 97
Fremde Mengen 15
Fundamentalsatz der Algebra 115, 140
Funktion, allgemeinster Begriff einer 27
Funktionen, analytische 34
— —; Identitätssatz für diese 87 ff.
— beschränkte 114
— eindeutige 27, 106
— elementare 28, 98 ff., 125, 126
— ganze (rationale und transzendente) 113 ff., 125
— Holomorphe 34
— mehrdeutige 106, 109 ff.
— nichtfortsetzbare 102
— rationale 28, 98, 115, 125, 129, 138 ff.
— reguläre 34
—, Umkehrung von 136 ff.

Ganze Funktionen 113 ff.
Gaußsche Ebene 8
Gebiete 25
Gebietsschachtelung 16
Gebietstreue 137
Gebilde, analytisches 104
Geschlossener Weg 22
— s Polygon 23
Gleichmäßige Konvergenz 73 ff.
— Stetigkeit 31
Glieder einer Folge 18

Gliedweise Differentiation und Integration 50, 75—79
Grenze, natürliche 102
— untere und obere 12
Grenzwert 19

Halbebene 9
Häufungspunkt 13
Hauptsatz der Funktionentheorie 52ff.
— — Differential- u. Integralrechnung 63
Hauptteil 124
Hauptwert von $\log z$ 111
Hauptwert von $z^{1/m}$ 112
Heine-Borelscher Satz 17
Hin- und Herintegrieren 50
Holomorph 34

Identitätssatz für analytische Funktionen 87ff.
— — Potenzreihen 80, 82
Imaginärer Teil einer Funktion 27
— — — Zahl 8
Innerer Punkt 14
Integral, Bestimmtes 39ff.
Integralformeln, Cauchysche 64ff., 68
Integralsatz, Cauchyscher 51ff.
Intervallschachtelung 16
Inverse Funktion 138
Isolierte Punkte 14
— singuläre Punkte 123

Jordanscher Kurvensatz 22
—s Kurvenstück 21

Kamke, E., 59
Kettenregel 33
Kompakt 14
Komplementärmenge 13
Konform 33
Kontinuum 26
Konvergenz 19
— gleichmäßige 73ff.
Konvergenzbereich unendlicher Reihen 69
Konvergenzkreis 70
Konvergenzprinzip, allgemeinstes 19
Konvergenzradius 70
Konvergenzsatz, Weierstraßscher 75
Kreiskettenverfahren 90
Kreisfläche 9
Kreislinie 9
Kreisring 10
Kurve 21
Kurvenstück 21

Länge 21, 22
Laplacesche Differentialgleichung 38
Laurentsche Entwicklung 118ff.
Leere Menge 14
Limes 19
— unterer und oberer 12
Lineare Funktion 28
Liouvillescher Satz 114
Logarithmus 99, 109

Maximum von $|f(z)|$ 86
—, Prinzip vom 86
Mehrdeutige Funktionen 106, 109ff.
Mengen s. Punktmengen
Monodromiesatz 107
Morerascher Satz 68

Natürliche Grenze 102
Nichtfortsetzbare Funktionen 102
Nullstellen 91, 115, 132, 140

Offene Mengen 14
Ordnung einer a-Stelle 92
— eines Poles 123

Pole 123, 129, 132
Pollard, S., 59
Polygon 23, 24
Polygonzug 23
Polynom 114
Positiver Umlaufsinn 23, 47
Potenz, allgemeine 113
Potenzreihen 70, 74, 79ff.
— Identitätssatz für 80, 82
Prinzip der analytischen Fortsetzung 95ff.
— vom Maximum 86
Produkt, unendliches 20
Punkt, äußerer 14
— innerer 14
— isolierter 14
— regulärer 34, 104
— singulärer 101, 103f., 123
— und Zahl 8
— uneigentlicher 10
Punktfolge 18
Punktmengen 11
Punktmengen, abgeschlossene 14ff.
— abzählbare 18
— auf einer Geraden 12
— beschränkte 13
— fremde 15
— in der Ebene 12
— offene 14
— zusammenhängende 15, 25, 26

Rand 9
Randpunkt 14, 31, 71, 86, 101
—, nicht erreichbarer 25
Rationale Funktionen 28, 98, 115, 125, 129, 138ff.
Reeller Teil einer Funktion 27
— — — Zahl 8
Reguläre Funktionen 34
— Punkte 34, 104
Regularitätsgebiet 34, 104
Reihen analytischer Funktionen 75ff.
—, gleichmäßig konvergente 73ff.
— mit veränderlichen Gliedern 69ff.
— unendliche 20
Rektifizierbar 21
Residuensatz 131ff.
Residuum 131
Riemannscher Satz 126
— Zahlenkugel 10
Ringgebiet 59, 118ff.

Schwankung einer Funktion 41
$\sin z$ und $\cos z$ 28, 96, 129
Sin z 28
Singuläre Punkte s. Punkt

Sommer, F. 59
Stammfunktion 61, 63
Stereographische Abbildung 10
Stetigkeit 29—31
— gleichmäßige 31
— nach innen 31
— längs einer Kurve 31
Streckbar 22
Streckenzug 21, 23

Taylorsche Reihe 81
Transzendente Funktionen 110 ff.
Teilbrüche 140
Teildarstellung einer Funktion 94
Teilmenge 13
Teilprodukte 20
Teilsummen 20
tg z und ctg z 126

Überdeckung 16
Umgebung 10, 14
Umkehrung analytischer Funktionen 136
Umlaufsinn 23, 47
Unbeschränkt 13
Uneigentlicher Punkt 10
Unendlich ferner Punkt 10, 127f.
—e Reihe 20
—es Produkt 20

Variabilitätsbereich 27
Variable 27
Vektor 28
Veränderliche 27
Vereinigungsmenge 15
Verzweigungspunkt 111, 113
vollständig differenzierbar 35

Weg 21
Wegstück 21
Weierstraßscher Doppelreihensatz 84
— Konvergenzsatz 75
Wertevorrat 27, 104
Wesentlich singuläre Stellen 123, 128f.
Windungspunkt 111, 113
Wurzel 99, 112

Zahl s. Punkt
Zahlenebene 8
Zahlenfolge 18
Zahlenkugel 10
Zahlenmengen s. Punktmengen
Zusammenhängend 15, 25, 26
Zweig 111

GESAMTVERZEICHNIS

der

SAMMLUNG GÖSCHEN

Jeder Band DM 3,60 · Doppelband DM 5,80

Stand Januar 1961

WALTER DE GRUYTER & CO., BERLIN W 30

Inhaltsübersicht

	Seite
Biologie	13
Botanik	13
Chemie	12
Deutsche Sprache und Literatur	6
Elektrotechnik	15
Englisch	7
Erd- und Länderkunde	8
Geologie	15
Germanisch	7
Geschichte	5
Griechisch	8
Hebräisch	8
Hoch- und Tiefbau	18
Indogermanisch	7
Kristallographie	15
Kunst	5
Land- und Forstwirtschaft	14
Lateinisch	8
Maschinenbau	16
Mathematik	10
Mineralogie	15
Musik	4
Pädagogik	3
Philosophie	3
Physik	12
Psychologie	3
Publizistik	9
Religionswissenschaften	4
Romanisch	7
Russisch	8
Sanskrit	8
Soziologie	3
Statistik	9
Technik	15
Technologie	13
Volkswirtschaft	9
Vermessungswesen	18
Wasserbau	17
Zoologie	14

Geisteswissenschaften

Philosophie

Einführung in die Philosophie von *H. Leisegang †*. 4. Auflage. 145 Seiten. 1960. (281)

Hauptprobleme der Philosophie von *G. Simmel †*. 7., unveränderte Auflage. 177 Seiten. 1950. (500)

Geschichte der Philosophie

I: Die griechische Philosophie von *W. Capelle*. 1. Teil. Von Thales bis Leukippos. 2., erweiterte Auflage. 135 Seiten. 1953. (857)

II: Die griechische Philosophie von *W. Capelle*. 2. Teil. Von der Sophistik bis zum Tode Platons. 2., stark erweiterte Auflage. 144 Seiten. 1953. (858)

III: Die griechische Philosophie von *W. Capelle*. 3. Teil. Vom Tode Platons bis zur Alten Stoa. 2., stark erweiterte Auflage. 132 Seiten. 1954. (859)

IV: Die griechische Philosophie von *W. Capelle*. 4. Teil. Von der Alten Stoa bis zum Eklektizismus im 1. Jh. v. Chr. 2., stark erweiterte Auflage. 132 Seiten. 1954. (863)

V: Die Philosophie des Mittelalters von *J. Koch*. In Vorbereitung. (826)

VI: Von der Renaissance bis Kant von *K. Schilling*. 234 Seiten. 1954. (394/394a)

VII: Immanuel Kant von *G. Lehmann*. In Vorbereitung. (536)

VIII: Die Philosophie des 19. Jahrhunderts von *G. Lehmann*. 1. Teil. 151 Seiten. 1953. (571)

IX: Die Philosophie des 19. Jahrhunderts von *G. Lehmann*. 2. Teil. 168 Seiten. 1953. (709)

X: Die Philosophie im ersten Drittel des 20. Jahrhunderts 1. Teil von *G. Lehmann*. 128 Seiten. 1957. (845)

XI: Die Philosophie im ersten Drittel des 20. Jahrhunderts 2. Teil von *G. Lehmann*. 114 Seiten. 1960. (850)

Die geistige Situation der Zeit (1931) von *K. Jaspers*. 5., unveränderter Abdruck der im Sommer 1932 bearbeiteten 5. Auflage. 211 Seiten. 1960. (1000)

Erkenntnistheorie von *G. Kropp*.
1. Teil: Allgemeine Grundlegung. 143 Seiten. 1950. (807)

Formale Logik von *P. Lorenzen*. 165 Seiten. 1958. (1176/1176a)

Philosophisches Wörterbuch von *M. Apel †*. 5., völlig neubearbeitete Auflage von *P. Ludz*. 315 Seiten. 1958. (1031/1031a)

Philosophische Anthropologie. Menschliche Selbstdeutung in Geschichte und Gegenwart von *M. Landmann*. 266 Seiten. 1955. (156/156a)

Pädagogik, Psychologie, Soziologie

Geschichte der Pädagogik von *Herm. Weimer*. 14., durchgesehene und vermehrte Auflage von *Heinz Weimer*. 178 Seiten. 1960. (145)

Therapeutische Psychologie. Ihr Weg durch die Psychoanalyse von *W. M. Kranefeldt*. Mit einer Einführung von *C. G. Jung*. 3. Auflage. 152 Seiten. 1956. (1034)

Allgemeine Psychologie von *Th. Erismann*. 3 Bände. 2., neubearbeitete Auflage.
I: Grundprobleme. 146 Seiten. 1958. (831)
II: Grundarten des physischen Geschehens. 248 Seiten. 1959. (832/832a)
III: Psychologie der Persönlichkeit. In Vorbereitung (833)

Soziologie. Geschichte und Hauptprobleme von *L. von Wiese*. 6. Auflage. 175 Seiten. 1960. (101)

Sozialpsychologie von *P. R. Hofstätter*. 181 Seiten, 15 Abbildungen, 22 Tabellen. 1956. (104/104a)

Psychologie des Berufs- und Wirtschaftslebens von *W. Moede †*. 190 Seiten, 48 Abbildungen. 1958. (851/851a)

Industrie- und Betriebssoziologie von *R. Dahrendorf*. 120 Seiten. 1956. (103)

Religionswissenschaften

Jesus von *M. Dibelius †*. 3. Auflage, mit einem Nachtrag von *W. G. Kümmel*. 140 Seiten. 1960. (1130)

Paulus von *M. Dibelius †*. Nach dem Tode des Verfassers herausgegeben und zu Ende geführt von *W. G. Kümmel*. 2., durchgesehene Auflage. 155 Seiten. 1956. (1160)

Luther von *F. Lau*. 151 Seiten. 1959. (1187)

Melanchthon von *R. Stupperich*. 139 Seiten. 1960. (1190)

Geschichte Israels. Von den Anfängen bis zur Zerstörung des Tempels (70 n. Chr.) von *E. L. Ehrlich*. 158 Seiten, 1 Tafel. 1958. (231/231a)

Römische Religionsgeschichte von *F. Altheim*. 2 Bände. 2., umgearbeitete Auflage.
I: Grundlagen und Grundbegriffe. 116 Seiten. 1956. (1035)
II: Der geschichtliche Ablauf. 164 Seiten. 1956. (1052)

Musik

Musikästhetik von *H. J. Moser*. 180 Seiten. Mit zahlreichen Notenbeispielen. 1953. (344)

Systematische Modulation von *R. Hernried*. 2. Auflage. 136 Seiten. Mit zahlreichen Notenbeispielen. 1950. (1094)

Der polyphone Satz von *E. Pepping*. 2 Bände.
I: Der cantus-firmus-Satz. 2. Auflage. 223 Seiten. Mit zahlreichen Notenbeispielen. 1950. (1148)
II: Übungen im doppelten Kontrapunkt und im Kanon. 137 Seiten. Mit zahlreichen Notenbeispielen. 1957. (1164/1164a)

Allgemeine Musiklehre von *H. J. Moser*. 2., durchgesehene Auflage. 155 Seiten. Mit zahlreichen Notenbeispielen. 1955. (220/220a)

Harmonielehre von *H. J. Moser*. 2 Bände.
I: 109 Seiten. Mit 120 Notenbeispielen. 1954. (809)

Die Musik des 19. Jahrhunderts von *W. Oehlmann*. 180 Seiten. 1953. (170)

Die Musik des 20. Jahrhunderts von *W. Oehlmann*. In Vorbereitung. (171/171a)

Technik der deutschen Gesangskunst von *H. J. Moser*. 3., durchgesehene und verbesserte Auflage. 144 Seiten, 5 Figuren sowie Tabellen und Notenbeispiele. 1954. (576/576a)

Die Kunst des Dirigierens von *H. W. von Waltershausen †*. 2., vermehrte Auflage. 138 Seiten. Mit 19 Notenbeispielen. 1954. (1147)

Die Technik des Klavierspiels aus dem Geiste des musikalischen Kunstwerkes von *K. Schubert †*. 3. Auflage. 110 Seiten. Mit Notenbeispielen. 1954. (1045)

Kunst

Stilkunde von *H. Weigert*. 2 Bände. 3., durchgesehene und ergänzte Auflage.

I: Vorzeit, Antike, Mittelalter. 136 Seiten, 94 Abbildungen. 1958. (80)

II: Spätmittelalter und Neuzeit. 150 Seiten, 88 Abbildungen. 1958. (781)

Archäologie von *A. Rumpf*. 2 Bände.

I: Einleitung, historischer Überblick. 143 Seiten, 6 Abbildungen, 12 Tafeln. 1953. (538)

II: Die Archäologensprache. Die antiken Reproduktionen. 136 Seiten, 7 Abbildungen, 12 Tafeln. 1956. (539)

Geschichte

Einführung in die Geschichtswissenschaft von *P. Kirn*. 3., durchgesehene Auflage. 128 Seiten. 1959. (270)

Zeitrechnung der römischen Kaiserzeit, des Mittelalters und der Neuzeit für die Jahre 1—2000 n. Chr. von *H. Lietzmann †*. 3. Auflage, durchgesehen von *K. Aland*. 130 Seiten. 1956. (1085)

Kultur der Urzeit von *F. Behn*. 3 Bände. 4. Auflage der Kultur der Urzeit Bd. 1—3 von *M. Hoernes*.

I: Die vormetallischen Kulturen. (Die Steinzeiten Europas. Gleichartige Kulturen in anderen Erdteilen.) 172 Seiten, 48 Abbildungen. 1950. (564)

II: Die älteren Metallkulturen. (Der Beginn der Metallbenutzung. Kupfer- und Bronzezeit in Europa, im Orient und in Amerika.) 160 Seiten, 67 Abbildungen. 1950. (565)

III: Die jüngeren Metallkulturen. (Das Eisen als Kulturmetall, Hallstatt-Latène-Kultur in Europa. Das erste Auftreten des Eisens in den anderen Weltteilen.) 149 Seiten, 60 Abbildungen. 1950. (566)

Vorgeschichte Europas von *F. Behn*. Völlig neue Bearbeitung der 7. Auflage der „Urgeschichte der Menschheit" von *M. Hoernes*. 125 Seiten, 47 Abbildungen. 1949. (42)

Der Eintritt der Germanen in die Geschichte von *J. Haller †*. 3. Auflage, durchgesehen von *H. Dannenbauer*. 120 Seiten, 6 Kartenskizzen. 1957. (1117)

Von den Karolingern zu den Staufern. Die altdeutsche Kaiserzeit (900—1250) von *J. Haller †*. 4., durchgesehene Auflage von *H. Dannenbauer*. 142 Seiten, 4 Karten. 1958. (1065)

Von den Staufern zu den Habsburgern. Auflösung des Reichs und Emporkommen der Landesstaaten (1250—1519) von *J. Haller †*. 2., durchgesehene Auflage von *H. Dannenbauer*. 118 Seiten, 6 Kartenskizzen. 1960. (1077)

Deutsche Geschichte im Zeitalter der Reformation, der Gegenreformation und des dreißigjährigen Krieges von *F. Hartung*. 129 Seiten. 1951. (1105)

Deutsche Geschichte von 1648—1740. Politischer und geistiger Wiederaufbau von *W. Treue*. 120 Seiten. 1956. (35)

Deutsche Geschichte von 1713—1806. Von der Schaffung des europäischen Gleichgewichts bis zu Napoleons Herrschaft von *W. Treue*. 168 Seiten. 1957. (39)

Deutsche Geschichte von 1806—1890. Vom Ende des alten bis zur Höhe des neuen Reiches. Von *W. Treue*. 127 Seiten. 1961. (893)

Deutsche Geschichte von 1890 bis zur Gegenwart von *W. Treue*. In Vorbereitung. (894)

Quellenkunde der Deutschen Geschichte im Mittelalter (bis zur Mitte des 15. Jahrhunderts) von *K. Jacob †*. 3 Bände.

I: Einleitung. Allgemeiner Teil. Die Zeit der Karolinger. 6. Auflage, bearbeitet von *H. Hohenleutner*. 127 Seiten. 1959. (279)

II: Die Kaiserzeit (911—1250). 5., neubearbeitete Auflage von *H. Hohenleutner*. 127 Seiten. 1961. (280)

III: Das Spätmittelalter (vom Interregnum bis 1500). Herausgegeben von *F. Weden*. 152 Seiten. 1952. (284)

Geschichte Englands von *H. Preller*. 2 Bände.

I: bis 1815. 3., stark umgearbeitete Auflage. 135 Seiten, 7 Stammtafeln, 2 Karten. 1952. (375)

II: Von 1815 bis 1910. 2., völlig umgearbeitete Auflage. 118 Seiten, 1 Stammtafel, 7 Karten. 1954. (1088)

Römische Geschichte von *F. Altheim*. 4 Bände. 2., verbesserte Auflage.

I: Bis zur Schlacht bei Pydna (168 v. Chr.). 124 Seiten. 1956. (19)

II: Bis zur Schlacht bei Actium (31 v. Chr.). 129 Seiten. 1956. (677)

III: Bis zur Schlacht an der Milvischen Brücke (312 n. Chr.). 148 Seiten. 1958. (679)

IV: Bis zur Schlacht am Yarmuk (636 n. Chr.). In Vorbereitung. (684)

Geschichte der Vereinigten Staaten von Amerika von *O. Graf zu Stolberg-Wernigerode*. 192 Seiten, 10 Karten. 1956. (1051/1051a)

Deutsche Sprache und Literatur

Geschichte der Deutschen Sprache von *H. Sperber*. 3. Auflage, besorgt von *W. Fleischhauer*. 128 Seiten. 1958. (915)

Deutsches Rechtschreibungswörterbuch von *M. Gottschald †*. 2., verbesserte Auflage. 219 Seiten. 1953. (200/200a)

Deutsche Wortkunde. Kulturgeschichte des deutschen Wortschatzes von *A. Schirmer*. 4. Auflage von *W. Mitzka*. 123 Seiten. 1960. (929)

Deutsche Sprachlehre von *W. Hofstaetter*. 10. Auflage. Völlige Umarbeitung der 8. Auflage. 150 Seiten. 1960. (20)

Stimmkunde für Beruf, Kunst und Heilzwecke von *H. Biehle*. 111 Seiten. 1955. (60)

Redetechnik. Einführung in die Rhetorik von *H. Biehle*. 115 Seiten. 1954. (61)

Sprechen und Sprachpflege (Die Kunst des Sprechens) von *H. Feist*. 2., verbesserte Auflage. 99 Seiten, 25 Abbildungen. 1952. (1122)

Deutsches Dichten und Denken von der germanischen bis zur staufischen Zeit von *H. Naumann †*. (Deutsche Literaturgeschichte vom 5.—13. Jahrhundert.) 2., verbesserte Auflage. 166 Seiten. 1952. (1121)

Deutsches Dichten und Denken vom Mittelalter zur Neuzeit von *G. Müller* (1270 bis 1700). 2., durchgesehene Auflage. 159 Seiten. 1949. (1086)

Deutsches Dichten und Denken von der Aufklärung bis zum Realismus (Deutsche Literaturgeschichte von 1700—1890) von *K. Viëtor †*. 3., durchgesehene Auflage. 159 Seiten. 1958. (1096)

Der Nibelunge Nôt in Auswahl mit kurzem Wörterbuch von *K. Langosch*. 10., durchgesehene Auflage. 164 Seiten. 1956. (1)

Kudrun und Dietrich-Epen in Auswahl mit Wörterbuch von *O. L. Jiriczek*. 6. Auflage, bearbeitet von *R. Wisniewski*. 173 Seiten. 1957. (10)

Wolfram von Eschenbach. Parzival. Eine Auswahl mit Anmerkungen und Wörterbuch von *H. Jantzen*. 2. Auflage, bearbeitet von *H. Kolb*. 128 Seiten. 1957. (921)

Hartmann von Aue. Der arme Heinrich nebst einer Auswahl aus der „Klage", dem „Gregorius" und den Liedern (mit einem Wörterverzeichnis) herausgegeben von *F. Maurer*. 96 Seiten. 1958. (18)

Gottfried von Strassburg in Auswahl herausgegeben von *F. Maurer*. 142 Seiten. 1959. (22)

Die deutschen Personennamen von *M. Gottschald †*. 2., verbesserte Auflage. 151 Seiten. 1955. (422)

Mittelhochdeutsche Grammatik von *H. de Boor* und *R. Wisniewski*. 2., verbesserte und ergänzte Auflage. 142 Seiten. 1960. (1108)

Indogermanisch, Germanisch

Indogermanische Sprachwissenschaft von *H. Krahe*. 2 Bände. 3., neubearbeitete Auflage.

I: Einleitung und Lautlehre. 106 Seiten. 1958. (59)
II: Formenlehre. 124 Seiten. 1959. (64)

Gotisches Elementarbuch. Grammatik, Texte mit Übersetzung und Erläuterungen. Mit einer Einleitung von *H. Hempel*. 3. Auflage. 1961. In Vorbereitung (79)

Germanische Sprachwissenschaft von *H. Krahe*. 2 Bände. 4., überarbeitete Auflage.

I: Einleitung und Lautlehre. 147 Seiten. 1960. (238)
II: Formenlehre. 4., überarbeitete Auflage. 149 Seiten. 1961. (780)

Altnordisches Elementarbuch. Schrift, Sprache, Texte mit Übersetzung und Wörterbuch von *F. Ranke*. 2., durchgesehene Auflage. 146 Seiten. 1949. (1115)

Englisch, Romanisch

Altenglisches Elementarbuch von *M. Lehnert*. Einführung, Grammatik, Texte mit Übersetzung und Wörterbuch. 4., verbesserte Auflage. 178 Seiten. 1959. (1125)

Historische neuenglische Laut- und Formenlehre von *E. Ekwall*. 3., durchgesehene Auflage. 150 Seiten. 1956. (735)

Englische Phonetik von *H. Mutschmann †*. 117 Seiten. 1956. (601)

Englische Literaturgeschichte von *F. Schubel*. 4 Bände.

I: Die alt- und mittelenglische Periode. 163 Seiten. 1954. (1114)
II: Von der Renaissance bis zur Aufklärung. 160 Seiten. 1956. (1116)
III: Romantik und Viktorianismus. 160 Seiten. 1960. (1124)

Beowulf von *M. Lehnert*. Eine Auswahl mit Einführung, teilweiser Übersetzung, Anmerkungen und etymologischem Wörterbuch. 3., verbesserte Auflage. 135 Seiten. 1959. (1135)

Shakespeare von *P. Meißner †*. 2. Auflage, neubearbeitet von *M. Lehnert*. 136 Seiten. 1954. (1142)

Italienische Literaturgeschichte von *K. Voßler †*. 5. Auflage, neubearbeitet von *A. Noyer-Weidner*. In Vorbereitung. (125)

Geschichte der römischen Literatur von *L. Bieler*. 2 Bände.
I: Die Literatur der Republik. 160 Seiten. 1961. (52)
II: Die Literatur der Kaiserzeit. 133 Seiten. 1961. (866)

Romanische Sprachwissenschaft von *H. Lausberg*. 2 Bände.
I: Einleitung und Vokalismus. 160 Seiten. 1956. (128/128a)
II: Konsonantismus. 95 Seiten. 1956. (250)

Griechisch, Lateinisch

Griechische Sprachwissenschaft von *W. Brandenstein*. 2 Bände.
I: Einleitung, Lautsystem, Etymologie. 160 Seiten. 1954. (117)
II: Wortbildung und Formenlehre. 192 Seiten. 1959. (118/118a)

Geschichte der griechischen Sprache. 2 Bände.
I: Bis zum Ausgang der klassischen Zeit von *O. Hoffmann †*. 3. Auflage, bearbeitet von *A. Debrunner †*. 156 Seiten. 1953. (111)
II: Grundfragen und Grundzüge des nachklassischen Griechisch von *A. Debrunner †*. 144 Seiten. 1954. (114)

Geschichte der griechischen Literatur von *W. Nestle*. 2 Bände.
I: 3. Auflage bearb. von *W. Liebich*. 1961. In Vorbereitung. (70)

Grammatik der neugriechischen Volkssprache von *J. Kalitsunakis*. 3., völlig neubearbeitete und erweiterte Auflage. 1961. In Vorbereitung. (756/756a)

Neugriechisch-deutsches Gesprächsbuch von *J. Kalitsunakis*. 2. Auflage, bearbeitet von *A. Steinmetz*. 99 Seiten. 1960. (587)

Hebräisch, Sanskrit, Russisch

Hebräische Grammatik von *G. Beer †*. 2 Bände. 2., völlig neubearbeitete Auflage von *R. Meyer*.
I: Schrift-, Laut- und Formenlehre I. 157 Seiten. 1952. (763/763a)
II: Formenlehre II. Syntax und Flexionstabellen. 195 Seiten. 1955. (764/764a)

Hebräisches Textbuch zu *G. Beer-R. Meyer*, Hebräische Grammatik von *R. Meyer*. 170 Seiten. 1960. (769/769a)

Sanskrit-Grammatik von *M. Mayrhofer*. 89 Seiten. 1953. (1158)

Russische Grammatik von *E. Berneker †*. 7., unveränderte Auflage von *M. Vasmer*. 155 Seiten. 1961. (66)

Einführung in die slavische Sprachwissenschaft von *H. Bräuer*. 2 Bände.
I: Einleitung und Lautlehre. 1961. In Vorbereitung. (1191)

Erd- und Länderkunde

Afrika von *F. Jaeger*. Ein geographischer Überblick. 2 Bände. 2., umgearbeitete Auflage.
I: Der Lebensraum. 179 Seiten, 18 Abbildungen. 1954. (910)
II: Mensch und Kultur. 155 Seiten, 6 Abbildungen. 1954. (911)

Australien und Ozeanien von *H. J. Krug*. 176 Seiten, 46 Skizzen. 1953. (319)

Volkswirtschaft, Statistik, Publizistik

Allgemeine Betriebswirtschaftslehre von *K. Mellerowicz*. 4 Bände. 10., erweiterte und veränderte Auflage.
I: 224 Seiten. 1958. (1008/1008a) II: 188 Seiten. 1959. (1153/1153a)
III: 260 Seiten. 1959. (1154/1154a) IV: 209 Seiten. 1959. (1186/1186a)
Diese 4 Bände sind auch in Ganzleinen (Bd. I nur noch) gebunden zum Preise von je DM 6,30 lieferbar.

Geschichte der Volkswirtschaftslehre von *S. Wendt*. 1961. In Vorbereitung. (1194)

Allgemeine Volkswirtschaftslehre von *A. Paulsen*. 4 Bände.
I: Grundlegung, Wirtschaftskreislauf. 3., durchgesehene und ergänzte Auflage. 148 Seiten. 1959. (1169)
II: Haushalte, Unternehmungen, Marktformen. 3., neubearbeitete Auflage. 166 Seiten, 32 Abbildungen. 1960. (1170)
III: Produktionsfaktoren. 3., durchgesehene Auflage. 200 Seiten. 1961. (1171)
IV: Gesamtbeschäftigung, Konjunkturen, Wachstum. 172 Seiten. 1960. (1172)

Finanzwissenschaft von *H. Kolms*. 4 Bände.
I: Grundlegung, Öffentliche Ausgaben. 160 Seiten. 1959. (148)
II: Erwerbseinkünfte, Gebühren und Beiträge; Allgemeine Steuerlehre. 148 Seiten. 1960. (391)
III: Besondere Steuerlehre. In Vorbereitung. (776)
IV: Öffentlicher Kredit. Haushaltswesen. Finanzausgleich. In Vorbereitung. (782)

Finanzmathematik von *M. Nicolas*. 192 Seiten, 11 Tafeln, 8 Tabellen und 72 Beispiele. 1959. (1183/1183a)

Industrie- und Betriebssoziologie von *R. Dahrendorf*. 120 Seiten. 1956. (103)

Wirtschaftssoziologie von *F. Fürstenberg*. 122 Seiten. 1961. (1193)

Psychologie des Berufs- und Wirtschaftslebens von *W. Moede †*. 190 Seiten, 48 Abbildungen. 1958. (851/851a)

Allgemeine Methodenlehre der Statistik von *J. Pfanzagl*. 2 Bände.
I: Elementare Methoden unter besonderer Berücksichtigung der Anwendungen in den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften. 205 Seiten, 35 Abbildungen. 1960. (746/746a)
II: Höhere Methoden unter besonderer Berücksichtigung der Anwendungen in Naturwissenschaft, Medizin und Technik. In Vorbereitung. (747/747a)

Zeitungslehre von *E. Dovifat*. 2 Bände. 3., neubearbeitete Auflage.
I: Theoretische und rechtliche Grundlagen — Nachricht und Meinung — Sprache und Form. 148 Seiten. 1955. (1039)
II: Redaktion — Die Sparten: Verlag und Vertrieb, Wirtschaft und Technik, Sicherung der öffentlichen Aufgabe. 158 Seiten. 1955. (1040)

Naturwissenschaften

Mathematik

Geschichte der Mathematik von *J. E. Hofmann*. 3 Bände.
I: Von den Anfängen bis zum Auftreten von Fermat und Descartes. 200 Seiten. 1953. (226)
II: Von Fermat und Descartes bis zur Erfindung des Calculus und bis zum Ausbau der neuen Methoden. 109 Seiten. 1957. (875)
III: Von den Auseinandersetzungen um den Calculus bis zur französischen Revolution. 107 Seiten. 1957. (882)

Mathematische Formelsammlung von *F. O. Ringleb*. 7., erweiterte Auflage. 320 Seiten, 40 Figuren. 1960. (51/51a)

Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen in zwei Farben zusammengestellt von *H. Schubert* und *R. Haussner*. 3., neubearbeitete Auflage von *J. Erlebach*. 158 Seiten. 1960. (81)

Fünfstellige Logarithmen von *A. Adler*. Mit mehreren graphischen Rechentafeln und häufig vorkommenden Zahlenwerten. 3. Auflage. 127 Seiten, 1 Tafel. 1959. (423)

Arithmetik von *P. B. Fischer* †. 3. Auflage von *H. Rohrbach*. 152 Seiten, 19 Abbildungen. 1958. (47)

Höhere Algebra von *H. Hasse*. 2 Bände. 4., durchgesehene Auflage.
I: Lineare Gleichungen. 152 Seiten. 1957. (931)
II: Gleichungen höheren Grades. 158 Seiten, 5 Figuren. 1958. (932)

Aufgabensammlung zur höheren Algebra von *H. Hasse* und *W. Klobe*. 2., verbesserte und vermehrte Auflage. 181 Seiten. 1952. (1082)

Elementare und klassische Algebra vom modernen Standpunkt von *W. Krull*. 2 Bände.
I: 2., erweiterte Auflage. 136 Seiten. 1952. (930)
II: 132 Seiten. 1959. (933)

Algebraische Kurven und Flächen von *W. Burau*. 28 Figuren. 1961. In Vorbereitung. (435)

Einführung in die Zahlentheorie von *A. Scholz* †. Überarbeitet und herausgegeben von *B. Schoeneberg*. 3. Auflage. 1961. In Vorbereitung. (1131)

Formale Logik von *P. Lorenzen*. 165 Seiten. 1958. (1176/1176a)

Topologie von *W. Franz*. 2 Bände.
I: Allgemeine Topologie. 144 Seiten, 9 Figuren. 1960. (1181)

Elemente der Funktionentheorie von *K. Knopp* †. 5. Auflage. 144 Seiten, 23 Fig. 1959. (1109)

Funktionentheorie von *K. Knopp* †. 2 Bände.
I: Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen. 9., neubearbeitete Auflage. 144 Seiten, 8 Figuren. 1957. (668)
II: Anwendungen und Weiterführung der allgemeinen Theorie. 8./9. Auflage. 130 Seiten, 7 Figuren. 1955. (703)

Aufgabensammlung zur Funktionentheorie von *K. Knopp* †. 2 Bände. 5. Auflage.
I: Aufgaben zur elementaren Funktionentheorie. 135 Seiten. 1957. (877)
II: Aufgaben zur höheren Funktionentheorie. 151 Seiten. 1959. (878)

Differential- und Integralrechnung von *M. Barner*. (Früher *Witting*). 4 Bände.
I: Grenzwertbegriff, Differentialrechnung. 1961. In Vorbereitung. (86)
Gewöhnliche Differentialgleichungen von *G. Hoheisel*. 6., neubearbeitete und erweiterte Auflage. 128 Seiten. 1960. (920)
Partielle Differentialgleichungen von *G. Hoheisel*. 4., durchgesehene Auflage. 128 Seiten. 1960. (1003)
Aufgabensammlung zu den gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen von *G. Hoheisel*. 3., durchgesehene und verbesserte Auflage. 124 Seiten. 1958. (1059)
Integralgleichungen von *G. Hoheisel*. 2., durchgesehene Auflage. 1961. In Vorbereitung. (1099)
Mengenlehre von *E. Kamke*. 3., neubearbeitete Auflage. 194 Seiten, 6 Figuren. 1955. (999/999a)
Gruppentheorie von *L. Baumgartner*. 3., neubearbeitete Auflage. 110 Seiten, 3 Tafeln. 1958. (837)
Ebene und sphärische Trigonometrie von *G. Hessenberg* †. 5. Auflage, durchgesehen von *H. Kneser*. 172 Seiten, 60 Figuren. 1957. (99)
Darstellende Geometrie von *W. Haack*. 3 Bände.
I: Die wichtigsten Darstellungsmethoden. Grund- und Aufriß ebenflächiger Körper. 3., durchgesehene und ergänzte Auflage. 113 Seiten, 120 Abbildungen. 1960. (142)
II: Körper mit krummen Begrenzungsflächen. Kotierte Projektionen. 2., durchgesehene und ergänzte Auflage. 129 Seiten, 86 Abbildungen. 1959. (143)
III: Axonometrie und Perspektive. 127 Seiten, 100 Abbildungen. 1957. (144)
Analytische Geometrie von *K. P. Grotemeyer*. 202 Seiten, 73 Abbildungen. 1958. (65/65a)
Nichteuklidische Geometrie. Hyperbolische Geometrie der Ebene von *R. Baldus* †. Durchgesehen und herausgegeben von *F. Löbell*. 3., verbesserte Auflage. 140 Seiten, 70 Figuren. 1953. (970)
Differentialgeometrie von *K. Strubecker* (früher *Rothe*). 3 Bände.
I: Kurventheorie der Ebene und des Raumes. 150 Seiten, 18 Figuren. 1955. (1113/1113a)
II: Theorie der Flächenmetrik. 195 Seiten, 14 Figuren. 1958. (1179/1179a)
III: Theorie der Flächenkrümmung. 254 Seiten, 38 Figuren. 1959. (1180/1180a)
Variationsrechnung I von *L. Koschmieder*. 2., verbesserte Auflage. Mit 23 Figuren. 1961. In Vorbereitung. (1074)
Einführung in die konforme Abbildung von *L. Bieberbach*. 5., erweiterte Auflage. 180 Seiten, 42 Figuren. 1956. (768/768a)
Vektoren und Matrizen von *S. Valentiner*. 2. Auflage. (9., erweiterte Auflage der „Vektoranalysis"). Mit Anhang: Aufgaben zur Vektorrechnung von *H. König*. 202 Seiten, 35 Figuren. 1960. (354/354a)
Versicherungsmathematik von *F. Böhm*. 2 Bände.
I: Elemente der Versicherungsrechnung. 3., vermehrte und verbesserte Auflage. Durchgesehener Neudruck. 151 Seiten. 1953. (180)
II: Lebensversicherungsmathematik. Einführung in die technischen Grundlagen der Sozialversicherung. 2., verbesserte und vermehrte Auflage. 205 Seiten. 1953. (917/917a)
Finanzmathematik von *M. Nicolas*. 192 Seiten, 11 Tafeln, 8 Tabellen und 72 Beispiele. 1959. (1183/1183a)

Physik

Einführung in die theoretische Physik von *W. Döring*. 5 Bände.
I: Mechanik. 2., verbesserte Auflage. 123 Seiten, 25 Abbildungen. 1960. (76)
II: Das elektromagnetische Feld. 2., verbesserte Auflage. 1961. In Vorbereitung. (77)
III: Optik. 117 Seiten, 32 Abbildungen. 1956. (78)
IV: Thermodynamik. 107 Seiten, 9 Abbildungen. 1956. (374)
V: Statistische Mechanik. 114 Seiten, 12 Abbildungen. 1957. (1017)

Mechanik deformierbarer Körper von *M. Päsler*. 199 Seiten, 48 Abbildungen. 1960. (1189/1189a)

Atomphysik von *K. Bechert* und *Ch. Gerthsen †*. 7 Bände.
I: Allgemeine Grundlagen. 1. Teil. 4., durchgesehene Auflage von *A. Flammersfeld*. 124 Seiten, 35 Abbildungen. 1959. (1009)
II: Allgemeine Grundlagen. 2. Teil. 4. Auflage. 1961. In Vorber. (1033)
III: Theorie des Atombaus. 1. Teil. 4., umgearbeitete Auflage. 148 Seiten, 16 Abbildungen. 1961. In Vorbereitung (1123/1123a)
IV: Theorie des Atombaus. 2. Teil. 3., umgearbeitete Auflage. 170 Seiten, 14 Abbildungen. 1954. (1165/1165a)

Differentialgleichungen der Physik von *F. Sauter*. 3., durchgesehene und ergänzte Auflage. 148 Seiten, 16 Figuren. 1958. (1070)

Physikalische Formelsammlung von *G. Mahler* †. Neubearbeitet von *K. Mahler*. 10., durchgesehene Auflage. 153 Seiten, 69 Figuren. 1959. (136)

Physikalische Aufgabensammlung von *G. Mahler †*. Neubearbeitet von *K. Mahler*. Mit den Ergebnissen. 10., durchgesehene Auflage. 127 Seiten. 1959. (243)

Chemie

Geschichte der Chemie in kurzgefaßter Darstellung von *G. Lockemann*. 2 Bände.
I: Vom Altertum bis zur Entdeckung des Sauerstoffs. 142 Seiten, 8 Bildnisse. 1950. (264)
II: Von der Entdeckung des Sauerstoffs bis zur Gegenwart. 151 Seiten, 16 Bildnisse. 1955. (265/265a)

Anorganische Chemie von *W. Klemm*. 11. Auflage. 185 Seiten, 18 Abbildungen. 1960. (37)

Organische Chemie von *W. Schlenk*. 8., erweiterte Auflage. 272 Seiten, 16 Abbildungen. 1960. (38/38a)

Physikalische Methoden der Organischen Chemie von *G. Kresze*. 1961. In Vorbereitung. (44)

Allgemeine und physikalische Chemie von *W. Schulze*. 2 Bände.
I: 5., durchgesehene Auflage. 139 Seiten, 10 Figuren. 1960. (71)
II: 5., verbesserte Auflage. 178 Seiten, 37 Figuren. 1961. (698/698a)

Molekülbau. Theoretische Grundlagen und Methoden der Strukturermittlung von *W. Schulze*. 123 Seiten, 43 Figuren. 1958. (786)

Physikalisch-chemische Rechenaufgaben von *E. Asmus*. 3., verbesserte Auflage. 96 Seiten. 1958. (445)

Maßanalyse. Theorie und Praxis der klassischen und der elektrochemischen Titrierverfahren von *G. Jander* und *K. F. Jahr*. 8., durchgesehene und ergänzte Auflage. 313 Seiten, 49 Figuren. 1959. (221/221a)

Qualitative Analyse von *H. Hofmann* u. *G. Jander*. 308 Seiten, 5 Abbildungen. 1960. (247/247a)

Thermochemie von *W. A. Roth* †. 2., verbesserte Auflage. 109 Seiten, 16 Figuren. 1952. (1057)

Stöchiometrische Aufgabensammlung von *W. Bahrdt* † und *R. Scheer*. Mit den Ergebnissen. 7., durchgesehene Auflage. 119 Seiten. 1960. (452)

Elektrochemie und ihre physikalisch-chemischen Grundlagen von *A. Dassler*. 2 Bände.

II: 178 Seiten, 17 Abbildungen. 1950. (253)

Technologie

Die Chemie der Kunststoffe von *K. Hamann*, unter Mitarbeit von *W. Funke* und *H. D. Hermann*. 143 Seiten. 1960. (1173)

Warenkunde von *K. Hassak* und *E. Beutel* †. 2 Bände.

I: Anorganische Waren sowie Kohle und Erdöl. 8. Auflage. Neubearbeitet von *A. Kutzelnigg*. 119 Seiten, 18 Figuren. 1958. (222)

II: Organische Waren. 8. Auflage. Vollständig neubearbeitet von *A. Kutzelnigg*. 157 Seiten, 32 Figuren. 1959. (223)

Die Fette und Öle von *Th. Klug*. 6., völlig neubearbeitete und verbesserte Auflage. 143 Seiten. 1961. (335)

Die Seifenfabrikation von *K. Braun* †. 3., neubearbeitete und verbesserte Auflage von *Th. Klug*. 116 Seiten, 18 Abbildungen. 1953. (336)

Textilindustrie von *A. Blümcke*.

I: Spinnerei und Zwirnerei. 111 Seiten, 43 Abbildungen. 1954. (184)

Biologie

Einführung in die allgemeine Biologie und ihre philosophischen Grund- und Grenzfragen von *M. Hartmann*. 132 Seiten, 2 Abbildungen. 1956. (96)

Hormone von *G. Koller*. 2., neubearbeitete und erweiterte Auflage. 187 Seiten, 60 Abbildungen, 19 Tabellen. 1949. (1141)

Fortpflanzung im Tier- und Pflanzenreich von *J. Hämmerling*. 2., ergänzte Auflage. 135 Seiten, 101 Abbildungen. 1951. (1138)

Geschlecht und Geschlechtsbestimmung im Tier- und Pflanzenreich von *M. Hartmann*. 2., verbesserte Auflage. 116 Seiten, 61 Abbildungen, 7 Tabellen. 1951. (1127)

Symbiose der Tiere mit pflanzlichen Mikroorganismen von *P. Buchner*. 2., verbesserte und vermehrte Auflage. 130 Seiten, 121 Abbildungen. 1949. (1128)

Grundriß der Allgemeinen Mikrobiologie von *W. u. A. Schwartz*. 2 Bände. 2., verbesserte und ergänzte Auflage.

I: 147 Seiten, 25 Abbildungen. 1960. (1155)

II: 142 Seiten, 29 Abbildungen. 1961. (1157)

Botanik

Entwicklungsgeschichte des Pflanzenreiches von *H. Heil*. 2. Auflage. 138 Seiten, 94 Abbildungen, 1 Tabelle. 1950. (1137)

Morphologie der Pflanzen von *L. Geitler*. 3., umgearbeitete Auflage. 126 Seiten, 114 Abbildungen. 1953. (141)

Pflanzengeographie von *L. Diels* †. 5., völlig neubearbeitete Auflage von *F. Matick*. 195 Seiten, 2 Karten. 1958. (389/389a)

Die Laubhölzer. Kurzgefaßte Beschreibung der in Mitteleuropa gedeihenden Laubbäume und Sträucher von *F. W. Neger* † und *E. Münch* †. 3., durchgesehene Auflage, herausgegeben von *B. Huber*. 143 Seiten, 63 Figuren, 7 Tabellen. 1950. (718)

Die Nadelhölzer (Koniferen) und übrigen Gymnospermen von *F. W. Neger* † und *E. Münch* †. 4. Auflage, durchgesehen und ergänzt von *B. Huber*. 140 Seiten, 75 Figuren, 4 Tabellen, 3 Karten. 1952. (355)

Pflanzenzüchtung von *H. Kuckuck*. 2 Bände.

I: Grundzüge der Pflanzenzüchtung. 3., völlig umgearbeitete und erweiterte Auflage. 132 Seiten, 22 Abbildungen. 1952. (1134)

II: Spezielle gartenbauliche Pflanzenzüchtung (Züchtung von Gemüse, Obst und Blumen). 178 Seiten, 27 Abbildungen. 1957. (1178/1178a)

Zoologie

Entwicklungsphysiologie der Tiere von *F. Seidel*. 2 Bände.

I: Ei und Furchung. 126 Seiten, 29 Abbildungen. 1953. (1162)

II: Körpergrundgestalt und Organbildung. 159 Seiten, 42 Abbildungen. 1953. (1163)

Das Tierreich

I: Einzeller, Protozoen von *E. Reichenow*. 115 Seiten, 59 Abbildungen. 1956. (444)

II: Schwämme und Hohltiere von *H. J. Hannemann*. 95 Seiten, 80 Abbildungen. 1956. (442)

III: Würmer. Platt-, Hohl-, Schnurwürmer, Kamptozoen, Ringelwürmer, Protracheaten, Bärtierchen, Zungenwürmer von *S. Jaeckel*. 114 Seiten, 36 Abbildungen. 1955. (439)

IV, 1: Krebse von *H. E. Gruner* und *K. Deckert*. 114 Seiten, 43 Abbildungen. 1956. (443)

IV, 2: Spinnentiere (Trilobitomorphen, Fühlerlose) und Tausendfüßler von *A. Kaestner*. 96 Seiten, 55 Abbildungen. 1955. (1161)

IV, 3: Insekten von *H. von Lengerken*. 128 Seiten, 58 Abbildungen. 1953. (594)

V: Weichtiere. Urmollusken, Schnecken, Muscheln und Kopffüßer von *S. Jaeckel*. 92 Seiten, 34 Abbildungen. 1954. (440)

VI: Stachelhäuter. Tentakulaten, Binnenatmer und Pfeilwürmer von *S. Jaeckel*. 100 Seiten, 46 Abbildungen. 1955. (441)

VII, 2: Fische von *D. Lüdemann*. 130 Seiten, 65 Abbildungen. 1955. (356)

VII, 3: Lurche (Chordatiere) von *K. Herter*. 143 Seiten, 129 Abbildungen. 1955. (847)

VII, 4: Kriechtiere (Chordatiere) von *K. Herter*. 200 Seiten, 142 Abbildungen. 1960. (447/447a)

VII, 5: Vögel (Chordatiere) von *H.-A. Freye*. 156 Seiten, 69 Abbildungen. 1960. (869)

VII, 6: Säugetiere (Chordatiere) von *Th. Haltenorth*. In Vorbereitung. (282)

Land- und Forstwirtschaft

Landwirtschaftliche Tierzucht. Die Züchtung und Haltung der landwirtschaftlichen Nutztiere von *H. Vogel*. 139 Seiten, 11 Abbildungen. 1952. (228)

Kulturtechnische Bodenverbesserungen von *O. Fauser*. 2 Bände. 5., verbesserte und vermehrte Auflage.
I: Allgemeines, Entwässerung. 127 Seiten, 49 Abbildungen. 1959. (691)
II: Bewässerung, Ödlandkultur, Umlegung. 159 Seiten, 67 Abbildungen. 1961. (692)

Agrikulturchemie von *K. Scharrer*. 2 Bände.
I: Pflanzenernährung. 143 Seiten. 1953. (329)
II: Futtermittelkunde. 192 Seiten. 1956. (330/330a)

Geologie, Mineralogie, Kristallographie

Geologie von *F. Lotze*. 2., verbesserte Auflage. 163 Seiten, 80 Abbildungen. 1961. (13)

Mineral- und Erzlagerstättenkunde von *H. Huttenlocher †*. 2 Bände.
I: 128 Seiten, 34 Abbildungen. 1954. (1014)
II: 156 Seiten, 48 Abbildungen. 1954. (1015/1015a)

Allgemeine Mineralogie. 10., erweiterte Auflage der „Mineralogie" von *R. Brauns †*, bearbeitet von *K. F. Chudoba*. 120 Seiten, 120 Figuren, 1 Tafel, 3 Tabellen. 1958. (29)

Spezielle Mineralogie. 10., erweiterte Auflage der „Mineralogie" von *R. Brauns †*, bearbeitet von *K. F. Chudoba*. 170 Seiten, 125 Figuren, 4 Tabellen. 1959. (31/31a)

Petrographie (Gesteinskunde) von *W. Bruhns †*. Neubearbeitet von *P. Ramdohr*. 5., erweiterte Auflage. 141 Seiten, 10 Figuren. 1960. (173)

Kristallographie von *W. Bruhns †*. 5. Auflage, neubearbeitet von *P. Ramdohr*. 109 Seiten, 164 Abbildungen. 1958. (210)

Einführung in die Kristalloptik von *E. Buchwald*. 4., verbesserte Auflage. 138 Seiten, 121 Figuren. 1952. (619)

Lötrohrprobierkunde. Mineraldiagnose mit Lötrohr- und Tüpfelreaktion. Von *M. Henglein*. 4., verbesserte Auflage. 91 Seiten, 11 Figuren. 1961. (483)

Technik

Graphische Darstellung in Wissenschaft und Technik von *M. Pirani*. 3., erweiterte Auflage bearbeitet von *J. Fischer* unter Benutzung der von *I. Runge* besorgten 2. Auflage. 216 Seiten, 104 Abbildungen. 1957. (728/728a)

Technische Tabellen und Formeln von *W. Müller*. 5., verbesserte und erweiterte Auflage von *E. Schulze*. 1961. In Vorbereitung. (579)

Elektrotechnik

Grundlagen der allgemeinen Elektrotechnik von *O. Mohr*. 2., durchgesehene Auflage. 260 Seiten, 136 Bilder, 14 Tafeln. 1961. (196/196a)

Die Gleichstrommaschine von *K. Humburg*. 2 Bände. 2., durchgesehene Auflage.
I: 102 Seiten, 59 Abbildungen. 1956. (257)
II: 101 Seiten, 38 Abbildungen. 1956. (881)

Die synchrone Maschine von *K. Humburg*. Neudruck. 109 Seiten, 78 Abbildungen. 1951. (1146)

Induktionsmaschinen von *F. Unger*. 2., erweiterte Auflage. 142 Seiten, 49 Abbildungen. 1954. (1140)

Die komplexe Berechnung von Wechselstromschaltungen von *H. H. Meinke*. 2. Auflage. 180 Seiten, 120 Abbildungen. 1957. (1156/1156a)

Theoretische Grundlagen zur Berechnung der Schaltgeräte von *F. Kesselring*. 3. Auflage. 144 Seiten, 92 Abbildungen. 1950. (711)

Einführung in die Technik selbsttätiger Regelungen von *W. zur Megede*. 2., durchgesehene Auflage. 176 Seiten, 86 Abbildungen. 1961. (714/714a)

Elektromotorische Antriebe (Grundlagen für die Berechnung) von *A. Schwaiger*. 3., neubearbeitete Auflage. 96 Seiten, 34 Abbildungen. 1952. (827)

Überspannungen und Überspannungsschutz von *G. Frühauf*. Durchgesehener Neudruck. 122 Seiten, 98 Abbildungen. 1950. (1132)

Maschinenbau

Metallkunde von *H. Borchers*. 2 Bände.
I: Aufbau der Metalle und Legierungen. 4. Auflage. 120 Seiten, 90 Abbildungen, 2 Tabellen. 1959. (432)
II: Eigenschaften, Grundzüge der Form- und Zustandsgebung. 3. und 4. Auflage. 179 Seiten, 107 Abbildungen, 10 Tabellen. 1959. (433/433a)

Die Werkstoffe des Maschinenbaues von *A. Thum* † und *C. M. v. Meysenbug*. 2 Bände.
I: Einführung in die Werkstoffprüfung. 2., neubearbeitete Auflage. 100 Seiten, 7 Tabellen, 56 Abbildungen. 1956. (476)
II: Die Konstruktionswerkstoffe. 132 Seiten, 40 Abbildungen. 1959. (936)

Dynamik von *W. Müller*. 2 Bände. 2., verbesserte Auflage.
I: Dynamik des Einzelkörpers. 128 Seiten, 48 Figuren. 1952. (902)
II: Systeme von starren Körpern. 102 Seiten, 41 Figuren. 1952. (903)

Technische Schwingungslehre von *L. Zipperer*. 2 Bände. 2., neubearbeitete Auflage.
I: Allgemeine Schwingungsgleichungen, einfache Schwinger. 120 Seiten, 101 Abbildungen. 1953. (953)
II: Torsionsschwingungen in Maschinenanlagen. 102 Seiten, 59 Abbildungen. 1955. (961/961a)

Werkzeugmaschinen für Metallbearbeitung von *K. P. Matthes*. 2 Bände.
I: 100 Seiten, 27 Abbildungen, 11 Zahlentafeln, 1 Tafelanhang. 1954. (561)
II: Fertigungstechnische Grundlagen der neuzeitlichen Metallbearbeitung. 101 Seiten, 30 Abbildungen, 5 Tafeln. 1955. (562)

Transformatoren von *W. Schäfer*. 3., überarbeitete und ergänzte Auflage. 130 Seiten, 73 Abbildungen. 1957. (952)

Das Maschinenzeichnen mit Einführung in das Konstruieren von *W. Tochtermann*. 2 Bände. 4. Auflage.
I: Das Maschinenzeichnen. 156 Seiten, 75 Tafeln. 1950. (589)
II: Ausgeführte Konstruktionsbeispiele. 130 Seiten, 58 Tafeln. 1950. (590)

Die Maschinenelemente von *E. A. vom Ende*. 3., verbesserte Auflage. 166 Seiten, 175 Figuren, 9 Tafeln. 1956. (3/3a)

Die Maschinen der Eisenhüttenwerke von *L. Engel*. 156 Seiten, 95 Abbildungen. 1957. (583/583a)

Walzwerke von *H. Sedlaczek* † unter Mitarbeit von *F. Fischer* und *M. Buch*. 232 Seiten, 157 Abbildungen. 1958. (580/580a)

Getriebelehre von *P. Grodzinski* †. 2 Bände.
I: Geometrische Grundlagen. 3., neubearbeitete Auflage von *G. Lechner*. 164 Seiten, 131 Figuren. 1960. (1061)

Gießereitechnik von *H. Jungbluth*. 2 Bände.
I: Eisengießerei. 126 Seiten, 44 Abbildungen. 1951. (1159)

Die Dampfturbinen. Ihre Wirkungsweise, Berechnung und Konstruktion von *C. Zietemann*. 3 Bände. 3., verbesserte Auflage.
I: Theorie der Dampfturbinen. 139 Seiten, 48 Abbildungen. 1955. (274)
II: Die Berechnung der Dampfturbinen und die Konstruktion der Einzelteile. 132 Seiten, 111 Abbildungen. 1956. (715)
III: Die Regelung der Dampfturbinen, die Bauarten, Turbinen für Sonderzwecke, Kondensationsanlagen. 126 Seiten, 90 Abbildungen. 1956. (716)

Verbrennungsmotoren von *W. Endres*. 3 Bände.
I: Überblick. Motor-Brennstoffe. Verbrennung im Motor allgemein, im Otto- und Diesel-Motor. 153 Seiten, 57 Abbildungen. 1958. (1076/1076a)
II: Die heutigen Typen der Verbrennungskraftmaschine. In Vorbereitung. (1184)
III: Die Einzelteile des Verbrennungsmotors. In Vorbereitung. (1185)

Autogenes Schweißen und Schneiden von *H. Niese*. 5. Auflage, neubearbeitet von *A. Küchler*. 136 Seiten, 71 Figuren. 1953. (499)

Die elektrischen Schweißverfahren von *H. Niese*. 2. Auflage, neubearbeitet von *H. Dienst*. 136 Seiten, 58 Abbildungen. 1955. (1020)

Die Hebezeuge. Entwurf von Winden und Kranen von *G. Tafel*. 2., verbesserte Auflage. 176 Seiten, 230 Figuren. 1954. (414/414a)

Wasserbau

Wasserkraftanlagen von *A. Ludin* unter Mitarbeit von *W. Borkenstein*. 2 Bände.
I: Planung, Grundlagen und Grundzüge. 124 Seiten, 60 Abbildungen. 1955. (665)
II: Anordnung und Ausbildung der Hauptbauwerke. 184 Seiten, 91 Abbildungen. 1958. (666/666a)

Verkehrswasserbau von *H. Dehnert*. 3 Bände.
I: Entwurfsgrundlagen, Flußregelungen. 103 Seiten, 52 Abbildungen. 1950. (585)
II: Flußkanalisierung und Schiffahrtskanäle. 94 Seiten, 60 Abbildungen. 1950. (597)
III: Schleusen und Hebewerke. 98 Seiten, 70 Abbildungen. 1950. (1152)

Wehr- und Stauanlagen von *H. Dehnert*. 134 Seiten, 90 Abbildungen. 1952. (965)

Talsperren von *F. Tölke*. 122 Seiten, 70 Abbildungen. 1953. (1044)

Hoch- und Tiefbau

Die wichtigsten Baustoffe des Hoch- und Tiefbaus von *O. Graf* †. 4., verbesserte Auflage. 131 Seiten, 63 Abbildungen. 1953. (984)

Baustoffverarbeitung und Baustellenprüfung des Betons von *A. Kleinlogel*. 2., neubearbeitete und erweiterte Auflage. 126 Seiten, 35 Abbildungen. 1951. (978)

Festigkeitslehre. 2 Bände.
I: Elastizität, Plastizität und Festigkeit der Baustoffe und Bauteile von *W. Gehler* † und *W. Herberg*. Durchgesehener und erweiterter Neudruck. 159 Seiten, 118 Abbildungen. 1952. (1144)
II: Formänderung, Platten, Stabilität und Bruchhypothesen von *W. Herberg* und *N. Dimitrov*. 187 Seiten, 94 Abbildungen. 1955. (1145/1145a)

Grundlagen des Stahlbetonbaus von *A. Troche*. 2., neubearbeitete und erweiterte Auflage. 208 Seiten, 75 Abbildungen, 17 Bemessungstafeln, 20 Rechenbeispiele. 1953. (1078)

Statik der Baukonstruktionen von *A. Teichmann*. 3 Bände.
I: Grundlagen. 101 Seiten, 51 Abbildungen, 8 Formeltafeln. 1956. (119)
II: Statisch bestimmte Stabwerke. 107 Seiten, 52 Abbildungen, 7 Tafeln. 1957. (120)
III: Statisch unbestimmte Systeme. 112 Seiten, 34 Abbildungen, 7 Formeltafeln. 1958. (122)

Fenster, Türen, Tore aus Holz und Metall. Eine Anleitung zu ihrer guten Gestaltung, wirtschaftlichen Bemessung und handwerksgerechten Konstruktion von *W. Wickop* †. 4., überarbeitete und ergänzte Auflage. 155 Seiten, 95 Abbildungen. 1955. (1092)

Heizung und Lüftung von *W. Körting*. 2 Bände. 9., neubearbeitete Auflage.
I: Das Wesen und die Berechnung der Heizungs- und Lüftungsanlagen. 1961. In Vorbereitung. (342)
II: Die Ausführung der Heizungs- und Lüftungsanlagen. 1961. In Vorbereitung. (343)

Industrielle Kraft- und Wärmewirtschaft von *F. A. F. Schmidt* und *A. Beckers*. 167 Seiten, 73 Abbildungen. 1957. (318/318a)

Vermessungswesen

Vermessungskunde von *P. Werkmeister*. 3 Bände.
I: Stückvermessung und Nivellieren. 10., völlig neubearbeitete Auflage von *W. Grossmann*. 143 Seiten, 117 Figuren. 1958. (468)
II: Horizontalaufnahmen und ebene Rechnungen. 8., völlig neubearbeitete Auflage von *W. Grossmann*. 133 Seiten, 97 Figuren. 1959. (469)
III: Trigonometrische und barometrische Höhenmessung. Tachymetrie und Absteckungen. 7., völlig neubearbeitete Auflage von *W. Grossmann*. 136 Seiten, 97 Figuren. 1960. (862)

Photogrammetrie von *G. Lehmann*. 189 Seiten, 132 Abbildungen. 1959. (1188/1188a)

Sammlung Göschen / Bandnummernfolge

1 Langosch, Der Nibelunge Nôt
3/3a v. Ende, Maschinenelemente
10 Jiriczek-Wisniewski, Kudrun-und Dietrich-Epen
13 Lotze, Geologie
18 Maurer, Hartmann von Aue. Der arme Heinrich
19 Altheim, Römische Geschichte I
20 Hofstaetter, Dt. Sprachlehre
22 Maurer, Gottfried von Strassburg
29 Brauns-Chudoba, Allg. Mineralog.
31/31a Brauns-Chudoba, Spez. Mineralogie
35 Treue, Dt. Geschichte von 1648 bis 1740
37 Klemm, Anorganische Chemie
38/38a Schlenk, Organische Chemie
39 Treue, Dt. Geschichte von 1713 bis 1806
42 Behn, Vorgeschichte Europas
44 Kresze, Physikalische Methoden der organischen Chemie
47 Fischer-Rohrbach, Arithmetik
51/51a Ringleb, Mathem. Formelslg.
52 Bieler, Röm. Literaturgesch. I
59 Krahe, Indog. Sprachwiss. I
60 Biehle, Stimmkunde
61 Biehle, Redetechnik
64 Krahe, Indog. Sprachwiss. II
65/65a Grotemeyer, Analyt. Geomet.
66 Berneker-Vasmer, Russische Grammatik
70 Nestle-Liebich, Gesch. d. griech. Literatur I
71 Schulze, Allgemeine und physikalische Chemie I
76 Döring, Einf. i. d. th. Physik I
77 Döring, Einf. i. d. th. Physik II
78 Döring, Einf. i. d. th. Physik III
79 Hempel, Got. Elementarbuch
80 Weigert, Stilkunde I
81 Schubert-Haussner-Erlebach, Vierstell. Logarithmentafeln
86 Barner, Differential- u. Integralrechn. I
96 Hartmann, Einf. in die allgem. Biologie
99 Hessenberg-Kneser, Ebene und sphär. Trigonometrie
101 v. Wiese, Soziologie
103 Dahrendorf, Industrie- und Betriebssoziologie
104/104a Hofstätter, Sozialpsycholog.
111 Hoffmann-Debrunner, Gesch. der griechischen Sprache I
114 Debrunner, Gesch. der griechisch. Sprache II
117 Brandenstein, Griechische Sprachwissenschaft I
118/118a Brandenstein, Griechische Sprachwissenschaft II
119 Teichmann, Statik der Baukonstruktionen I
120 Teichmann, Statik der Baukonstruktionen II
122 Teichmann, Statik der Baukonstruktionen III
125 Vossler-Noyer-Weidner, Ital. Literaturgeschichte
128/128a Lausberg, Romanische Sprachwissenschaft I
136 Mahler, Physikal. Formelslg.
141 Geitler, Morphologie der Pflanzen
142 Haack, Darstellende Geometrie I
143 Haack, Darstellende Geometrie II
144 Haack, Darstellende Geometrie III
145 Weimer, Gesch. der Pädagogik
148 Kolms, Finanzwissenschaft I
156/156a Landmann, Philosophische Anthropologie
170 Oehlmann, Musik des 19. Jhs.
171/171a Oehlmann, Musik des 20. Jhs.
173 Bruhns-Ramdohr, Petrographie
180 Böhm, Versicherungsmathem. I
184 Blümcke, Textilindustrie I
196/196a Mohr, Grundlagen der Elektrotechnik
200/200a Gottschald, Dt. Rechtschreibungswörterbuch
210 Bruhns-Ramdohr, Kristallogr.
220/220a Moser, Allg. Musiklehre
221/221a Jander-Jahr, Maßanalyse
222 Hassak-Beutel-Kutzelnigg, Warenkunde I
223 Hassak-Beutel-Kutzelnigg, Warenkunde II
226 Hofmann, Gesch. d. Mathem. I
228 Vogel, Landw. Tierzucht
231/231a Ehrlich, Geschichte Israels
238 Krahe, German. Sprachwiss. I
243 Mahler, Physikal. Aufgabenslg.
247/247a Hofmann-Jander, Qualitative Analyse

250 Lausberg, Romanische Sprachwissenschaft II
253 Dassler, Elektrochemie II
257 Humburg, Gleichstrommaschine I
264 Lockemann, Gesch. d. Chemie I
265/265a Lockemann, Geschichte der Chemie II
270 Kirn, Einführung in die Geschichtswissenschaft
274 Zietemann, Dampfturbinen I
279 Jacob-Hohenleutner, Quellenkde. der deutschen Geschichte I
280 Jacob-Hohenleutner, Quellenkde. der deutschen Geschichte II
281 Leisegang, Einführung in die Philosophie
282 Haltenorth, Säugetiere
284 Jacob-Weden, Quellenkunde der deutschen Geschichte III
318/318a Schmidt-Beckers, Industrielle Kraft- u. Wärmewirtschaft
319 Krug, Australien und Ozeanien
329 Scharrer, Agrikulturchemie I
330/330a Scharrer, Agrikulturchem. II
335 Klug, Fette und Öle
336 Braun-Klug, Seifenfabrikation
342 Körting, Heizung und Lüftung I
343 Körting, Heizung und Lüftung II
344 Moser, Musikästhetik
354/354a Valentiner-König, Vektoren und Matrizen
355 Neger-Münch, Nadelhölzer
356 Lüdemann, Fische
374 Döring, Einführung in die theoret. Physik IV
375 Preller, Geschichte Englands I
389/389a Diels-Mattick, Pflanzengeographie
391 Kolms, Finanzwissenschaft II
394/394a Schilling, Von der Renaissance bis Kant
414/414a Tafel, Hebezeuge
422 Gottschald, Dt. Personennamen
423 Adler, Fünfstellige Logarithmen
432 Borchers, Metallkunde I
433/433a Borchers, Metallkunde II
435 Burau, Algebr. Kurven u. Flächen
439 Jaeckel, Würmer
440 Jaeckel, Weichtiere
441 Jaeckel, Stachelhäuter
442 Hannemann, Schwämme und Hohltiere
443 Gruner-Deckert, Krebse
444 Reichenow, Einzeller
445 Asmus, Physikal.-chem. Rechenaufgaben
447/447a Herter, Kriechtiere
452 Bahrdt-Scheer, Stöchiometrische Aufgabensammlung
468 Werkmeister-Grossmann, Vermessungskunde I
469 Werkmeister-Grossmann, Vermessungskunde II
476 Thum-Meysenbug, Die Werkstoffe des Maschinenbaues I
483 Henglein, Lötrohrprobierkunde
499 Niese-Küchler, Autogenes Schweißen
500 Simmel, Hauptprobleme der Philosophie
536 Lehmann, Kant
538 Rumpf, Archäologie I
539 Rumpf, Archäologie II
561 Matthes, Werkzeugmaschinen I
562 Matthes, Werkzeugmaschinen II
564 Behn, Kultur der Urzeit I
565 Behn, Kultur der Urzeit II
566 Behn, Kultur der Urzeit III
571 Lehmann, Philosophie d. 19. Jh. I
576/576a Moser, Gesangskunst
579 Müller-Schulze, Techn. Tabellen
580/580a Sedlaczek-Fischer-Buch, Walzwerke
583/583a Engel, Maschinen der Eisenhüttenwerke
585 Dehnert, Verkehrswasserbau I
587 Kalitsunakis-Steinmetz, Neugriech.-dt. Gesprächsbuch
589 Tochtermann, Maschinenzeichnen I
590 Tochtermann, Maschinenzeichnen II
594 v. Lengerken, Insekten
597 Dehnert, Verkehrswasserbau II
601 Mutschmann, Engl. Phonetik
619 Buchwald, Kristalloptik
665 Ludin-Borkenstein, Wasserkraftanlagen I
666/666a Ludin-Borkenstein, Wasserkraftanlagen II
668 Knopp, Funktionentheorie I
677 Altheim, Röm. Geschichte II
679 Altheim, Röm. Geschichte III

684 Altheim, Röm. Geschichte IV
691 Fauser, Kulturtechn. Bodenverbesserungen I
692 Fauser, Kulturtechn. Bodenverbesserungen II
698/698a Schulze, Allgemeine und physikalische Chemie II
703 Knopp, Funktionentheorie II
709 Lehmann, Philosophie d. 19. Jh. II
711 Kesselring, Berechnung der Schaltgeräte
714/714a zur Megede, Technik selbsttätiger Regelungen
715 Zietemann, Dampfturbinen II
716 Zietemann, Dampfturbinen III
718 Neger-Münch, Laubhölzer
728/728a Pirani-Fischer, Graph. Darstellung in Wissensch. u. Technik
735 Ekwall, Historische neuengl. Laut- und Formenlehre
746/746a Pfanzagl, Allg. Methodenlehre der Statistik I
747/747a Pfanzagl, Allg. Methodenlehre der Statistik II
756/756a Kalitsunakis, Grammatik der Neugriechischen Volkssprache
763/763a Beer-Meyer, Hebräische Grammatik I
764/764a Beer-Meyer, Hebräische Grammatik II
768/768a Bieberbach, Einführung in die konforme Abbildung
769/769a Beer-Meyer, Hebr. Textbuch
776 Kolms, Finanzwissenschaft III
780 Krahe, German. Sprachwiss. II
781 Weigert, Stilkunde II
782 Kolms, Finanzwissenschaft IV
786 Schulze, Molekülbau
807 Kropp, Erkenntnistheorie
809 Moser, Harmonielehre I
826 Koch, Philosophie des Mittelalters
827 Schwaiger, Elektromotorische Antriebe
831 Erismann, Allg. Psychologie I
832/832a Erismann, Allg. Psychologie II
833 Erismann, Allg. Psychologie III
837 Baumgartner, Gruppentheorie
845 Lehmann, Philosophie im ersten Drittel des 20. Jahrhunderts I
847 Herter, Lurche
850 Lehmann, Philosophie im ersten Drittel des 20. Jahrhunderts II
851/851a Moede, Psychologie des Berufs- und Wirtschaftslebens
857 Capelle, Griech. Philosophie I
858 Capelle, Griech. Philosophie II
859 Capelle, Griech. Philosophie III
862 Werkmeister-Grossmann, Vermessungskunde III
863 Capelle, Griech. Philosophie IV
866 Bieler, Röm. Literaturgesch. II
869 Freye, Vögel
875 Hofmann, Geschichte der Mathematik II
877 Knopp, Aufgabensammlung zur Funktionentheorie I
878 Knopp, Aufgabensammlung zur Funktionentheorie II
881 Humburg, Gleichstrommasch. II
882 Hofmann, Gesch. d. Mathematik III
893 Treue, Dt. Geschichte von 1807 bis 1890
894 Treue, Dt. Geschichte von 1890 bis zur Gegenwart
902 Müller, Dynamik I
903 Müller, Dynamik II
910 Jaeger, Afrika I
911 Jaeger, Afrika II
915 Sperber-Fleischhauer, Geschichte der Deutschen Sprache
917/917a Böhm, Versicherungsmathematik II
920 Hoheisel, Gewöhnliche Differentialgleichungen
921 Jantzen-Kolb, W. v. Eschenbach. Parzival
929 Schirmer-Mitzka, Dt. Wortkunde
930 Krull, Elementare und klassische Algebra I
931 Hasse, Höhere Algebra I
932 Hasse, Höhere Algebra II
933 Krull, Elementare und klassische Algebra II
936 Thum-Meysenbug, Werkstoffe des Maschinenbaues II
952 Schäfer, Transformatoren
953 Zipperer, Techn. Schwingungsl. I
961/961a Zipperer, Techn. Schwingungslehre II
965 Dehnert, Wehr- und Stauanlagen

970 Baldus-Löbell, Nichteuklidische Geometrie
978 Kleinlogel, Baustoffverarbeitung und Baustellenprüfung d. Betons
984 Graf, Baustoffe des Hoch- und Tiefbaues
999/999a Kamke, Mengenlehre
1000 Jaspers, Geistige Situat. der Zeit
1003 Hoheisel, Partielle Differentialgl.
1008/1008a Mellerowicz, Allgemeine Betriebswirtschaftslehre I
1009 Bechert-Gerthsen-Flammersfeld, Atomphysik I
1014 Huttenlocher, Mineral- und Erzlagerstättenkunde I
1015/1015a Huttenlocher, Mineral- u. Erzlagerstättenkunde II
1017 Döring, Einführung in die theoret. Physik V
1020 Niese-Dienst, Elektrische Schweißverfahren
1031/1031a Apel-Ludz, Philosophisches Wörterbuch
1033 Bechert-Gerthsen, Atomphys. II
1034 Kranefeldt-Jung, Therapeutische Psychologie
1035 Altheim, Röm. Religionsgeschichte I
1039 Dovifat, Zeitungslehre I
1040 Dovifat, Zeitungslehre II
1044 Tölke, Talsperren
1045 Schubert, Technik des Klavierspiels
1051/1051a Stolberg-Wernigerode, Gesch. d. Verein. Staaten von Amerika
1052 Altheim, Röm. Religionsgesch. II
1057 Roth, Thermochemie
1059 Hoheisel, Aufgabenslg. z. d. gew. u. part. Differentialgl.
1061 Grodzinski-Lechner, Getriebel. I
1065 Haller-Dannenbauer, Von den Karolingern zu den Staufern
1070 Sauter, Differentialgleichungen der Physik
1074 Koschmieder, Variationsrechnung I
1076/1076a Endres, Verbrennungsmotoren I
1077 Haller-Dannenbauer, Von den Staufern zu den Habsburgern
1078 Troche, Stahlbetonbau
1082 Hasse-Klobe, Aufgabensammlung zur höheren Algebra
1085 Lietzmann-Aland, Zeitrechnung
1086 Müller, Dt. Dichten u. Denken
1088 Preller, Gesch. Englands II
1092 Wickop, Fenster, Türen, Tore
1094 Hernried, System. Modulation
1096 Viëtor, Dt. Dichten und Denken
1099 Hoheisel, Integralgleichungen
1105 Hartung, Dt. Geschichte im Zeitalter der Reformation
1108 de Boor-Wisniewski, Mittelhochdeutsche Grammatik
1109 Knopp, Elemente der Funktionentheorie
1113/1113a Strubecker, Differentialgeometrie I
1114 Schubel, Engl. Literaturgesch. I
1115 Ranke, Altnord. Elementarb.
1116 Schubel, Engl. Literaturgesch. II
1117 Haller-Dannenbauer, Eintritt der Germanen in die Geschichte
1121 Naumann, Dt. Dichten u. Denken
1122 Feist, Sprechen u. Sprachpflege
1123/1123a Bechert-Gerthsen, Atomphysik III
1124 Schubel, Engl. Literaturgesch. III
1125 Lehnert, Altengl. Elementarbuch
1127 Hartmann, Geschlecht und Geschlechtsbestimmung im Tier- und Pflanzenreich
1128 Buchner, Symbiose der Tiere mit pflanzl. Mikroorganismen
1130 Dibelius-Kümmel, Jesus
1131 Scholz-Schöneberg, Einführung in die Zahlentheorie
1132 Frühauf, Überspannungen und Überspannungsschutz
1134 Kuckuck, Pflanzenzüchtung I
1135 Lehnert, Beowulf
1137 Heil, Entwicklungsgeschichte des Pflanzenreiches
1138 Hämmerling, Fortpflanzung im Tier- und Pflanzenreich
1140 Unger, Induktionsmaschinen
1141 Koller, Hormone
1142 Meissner-Lehnert, Shakespeare
1144 Gehler-Herberg, Festigkeitslehre I
1145/1145a Herberg-Dimitrov, Festigkeitslehre II
1146 Humburg, Synchrone Maschine

1147 v. Waltershausen, Kunst des Dirigierens
1148 Pepping, Der polyphone Satz I
1152 Dehnert, Verkehrswasserbau III
1153/1153a Mellerowicz, Allgemeine Betriebswirtschaftslehre II
1154/1154a Mellerowicz, Allgemeine Betriebswirtschaftslehre III
1155 Schwartz, Mikrobiologie I
1156/1156a Meinke, Komplexe Berechn. v. Wechselstromschalt.
1157 Schwartz, Mikrobiologie II
1158 Mayrhofer, Sanskrit-Grammatik
1159 Jungbluth, Gießereitechnik I
1160 Dibelius-Kümmel, Paulus
1161 Kaestner, Spinnentiere
1162 Seidel, Entwicklungsphysiologie der Tiere I
1163 Seidel, Entwicklungsphysiologie der Tiere II
1164/1164a Pepping, Der polyphone Satz II
1165/1165a Bechert-Gerthsen, Atomphysik IV
1169 Paulsen, Allgemeine Volkswirtschaftslehre I
1170 Paulsen, Allgemeine Volkswirtschaftslehre II
1171 Paulsen, Allgemeine Volkswirtschaftslehre III
1172 Paulsen, Allgemeine Volkswirtschaftslehre IV
1173 Hamann-Funke-Hermann, Chemie der Kunststoffe
1176/1176a Lorenzen, Formale Logik
1178/1178a Kuckuck, Pflanzenzüchtung II
1179/1179a Strubecker, Differentialgeometrie II
1180/1180a Strubecker, Differentialgeometrie III
1181 Franz, Topologie I
1183/1183a Nicolas, Finanzmathematik
1184 Endres, Verbrennungsmot. II
1185 Endres, Verbrennungsmot. III
1186/1186a Mellerowicz, Allgemeine Betriebswirtschaftslehre IV
1187 Lau, Luther
1188/1188a Lehmann, Photogrammetrie
1189/1189a Päsler, Mechanik deformierbarer Körper
1190 Stupperich, Melanchthon
1191 Bräuer, Slav. Sprachwiss. I
1193 Fürstenberg, Wirtschaftssoziologie
1194 Wendt, Gesch. d. Volkswirtschaftslehre

Autorenregister

Adler 10
Aland 5
Altheim 4, 6
Apel 3
Asmus 12
Bahrdt 13
Baldus 11
Barner 11
Baumgartner 11
Bechert 12
Beckers 18
Beer 8
Behn 5
Berneker 8
Beutel 13
Bieberbach 11
Biehle 6
Bieler 8
Blümcke 13
Böhm 11
de Boor 7
Borchers 16
Borkenstein 17
Bräuer 8
Brandenstein 8
Braun 13
Brauns 15
Bruhns 15
Buch 17
Buchner 13
Buchwald 15
Burau 10
Capelle 3
Chudoba 15
Dahrendorf 4, 9
Dannenbauer 5
Dassler 13
Debrunner 8
Deckert 14
Dehnert 17
Dibelius 4
Diels 14
Dienst 17
Dimitrov 18
Döring 12
Dovifat 9
Ehrlich 4
Ekwall 7
Ende, vom 16
Endres 17
Engel 17
Erismann 4
Erlebach 10
Fauser 15
Feist 6
Fischer, F 17
Fischer, J. 15
Fischer, P. B. 10
Flammersfeld 12
Fleischhauer 6

Franz 10
Freye 14
Frühauf 16
Fürstenberg 9
Funke 13
Gehler 18
Geitler 14
Gerthsen 12
Gottschald 6, 7
Graf 18
Grodzinski 17
Grossmann 18
Grotemeyer 11
Gruner 14
Haack 11
Hämmerling 13
Haller 5
Haltenorth 14
Hamann 13
Hannemann 14
Hartmann 13
Hartung 5
Hassak 13
Hasse 10
Haussner 10
Heil 14
Hempel 7
Henglein 15
Herberg 18
Hermann 13
Hernried 4
Herter 14
Hessenberg 11
Hoernes 5
Hoffmann 8
Hofmann 10, 12
Hofstätter 4
Hofstaetter 6
Hoheisel 11
Hohenleutner 6
Huber 14
Humburg 15
Huttenlocher 15
Jacob 6
Jaeckel 14
Jaeger 8
Jahr 12
Jander 12
Jantzen 7
Jaspers 3
Jiriczek 7
Jung 3
Jungbluth 17
Kaestner 14
Kalitsunakis 8
Kamke 11
Kesselring 16
Kirn 5
Kleinlogel 18
Klemm 12
Klobe 10
Klug 13
Kneser 11
Knopp 10
Koch 3
König 11
Körting 18
Kolb 7
Koller 13
Kolms 9
Koschmieder 11
Krahe 7
Kranefeldt 3
Kresze 12
Kropp 3
Krug 8
Krull 10
Kuckuck 14
Küchler 17
Kümmel 4
Kutzelnigg 13
Landmann 3
Langosch 7
Lau 4
Lausberg 8
Lechner 17
Lehmann, G. 3
Lehmann, G. 18
Lehnert 7, 8
Leisegang 3
Lengerken, von 14
Liebich 8
Lietzmann 5
Lockemann 12
Löbell 11
Lorenzen 3, 10
Lotze 15
Ludin 17
Ludz 3
Lüdemann 14
Mahler 12
Matthes 16
Mattick 14
Maurer 7
Mayrhofer 8
Megede, zur 16
Meinke 16
Meissner 8
Mellerowicz 9
Meyer 8
Meysenbug 16
Mitzka 6
Moede 4, 9
Mohr 15
Moser 4
Müller, G. 6
Müller, W. 15, 16
Münch 14
Mutschmann 7
Naumann 6
Neger 14
Nestle 8
Nicolas 9, 11
Niese 17
Noyer-Weidner 8
Oehlmann 4
Püsler 12
Paulsen 9
Pepping 4
Pfanzagl 9
Pirani 15
Preller 6
Ramdohr 15
Ranke 7
Reichenow 14
Ringleb 10
Rohrbach 10
Roth 13
Rumpf 5
Runge 15
Sauter 12
Schäfer 16
Scharrer 15
Scheer 13
Schilling 3
Schirmer 6
Schlenk 12
Schmidt 18
Schoeneberg 10
Scholz 10
Schubel 7
Schubert, H. 10
Schubert, K. 5
Schulze, E. 15
Schulze, W. 12
Schwartz 13
Schwaiger 16
Sedlaczek 17
Seidel 14
Simmel 3
Sperber 6
Steinmetz 8
Stolberg-Wernigerode, zu 6
Strubecker 11
Stupperich 4
Tafel 17
Teichmann 18
Thum 16
Tochtermann 16
Tölke 17
Treue 5, 6
Troche 18
Unger 15
Valentiner 11
Vasmer 8
Viëtor 6
Vogel 14
Vossler 8
Waltershausen, v. 5
Weden 6
Weigert 5
Weimer 3
Wendt 9
Werkmeister 18
Wickop 18
Wiese, von 4
Wisniewski 7
Witting 11
Zietemann 17
Zipperer 16